Übungen zu Numerische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen

Markus Grasmair, Markus Haltmeier, Otmar Scherzer

Für den 18. und 20. Jänner 2011

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Bewegung eines nichtlinearen Pendels durch die Differentialgleichung

$$\theta''(t) + c_1\theta'(t) + c_2 \sin\big(\theta(t)\big) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $\theta(0) = \theta_0$ und $\theta'(0) = 0$ beschrieben werden kann.

   (a) Reduzieren Sie diese Differentialgleichung auf ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung.

   (b) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, welche dieses System mithilfe des klassischen Runge-Kutta Verfahrens dritter Ordnung löst. Dabei sollen dieser Funktion als Eingabeparameter der Anfangswert θ_0, die Endzeit t_1, die Schrittweite h, sowie die Parameter c_1 und c_2 übergeben werden.

   (c) Testen Sie Ihre Matlab-Funktion mit $\theta_0 = \pi/2$, $c_1 = 0.3$ und $c_2 = 1$.

2. Wir betrachten das System aus gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'(t) &= 98u(t) + 198v(t)\,, \\ v'(t) &= -99u(t) - 199v(t)\,, \end{aligned}$$

zu den Anfangsbedingungen $u(0) = 1$ und $v(0) = 0$.

   (a) Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Anfangswertproblems.

   (b) Schreiben Sie Matlab-Funktionen, welche dieses Anfangswertproblem einmal mit dem expliziten Eulerverfahren und einmal mit dem impliziten Eulerverfahren lösen. Vergleichen Sie die numerischen Ergebnisse für verschiedene Schrittweiten $h > 0$ mit der exakten Lösung aus Teil (a).

3. Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2}(x,t) = c^2\,\frac{d^2u}{dx^2}(x,t) \qquad \text{für } (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$$

zu den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$, $(du/dt)(x,0) = 0$ und den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche die Wellengleichung mithilfe des expliziten Finite-Differenzen-Verfahrens löst. Dabei sollen dieser Funktion als Eingabeparameter die Anfangsfunktion f, die Endzeit t_1, die Schrittweiten Δx und Δt, sowie der Parameter c übergeben werden.

(Beide zweite Ableitungen sollen dabei mit symmetrischen finiten Differenzen approximiert werden.)

4. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Finite-Differenzen-Verfahrens aus Aufgabe 3 zur Lösung der Wellengleichung.

5. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{du}{dt}(x,t) = c\frac{d^2u}{dx^2}(x,t) \qquad \text{für } (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$$

zu der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ und den Randbedingungen $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$ mithilfe des Crank–Nicolson Verfahrens löst.

6. Falls das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, auf dem dem eine Differentialgleichung gelöst werden soll, eine einfache geometrische Gestalt hat, etwa $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, ist es möglich, bilineare finite Elemente zur Lösung zu verwenden, die auf einem einfachen quadratischen Gitter definiert sind. Dazu unterteilt man Ω in Quadrate der Form $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, wobei $x_i = ih$ und $y_j = jh$ für eine vorgegebene Diskretisierungsfeinheit $h > 0$. Dann kann man die *bilineare* Basisfunktion $\phi_{i,j}$, die am Knoten (x_i, y_j) gleich 1 ist und an allen Knoten gleich 0, definieren als

$$\phi_{i,j}(x,y) := \begin{cases} h^{-2}(x - x_{i-1})(y - y_{j-1}) & \text{falls } (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \\ h^{-2}(x_{i+1} - x)(y - y_{j-1}) & \text{falls } (x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \\ h^{-2}(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y) & \text{falls } (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]\,, \\ h^{-2}(x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y) & \text{falls } (x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten Sie diese Diskretisierung zur Lösung der Laplacegleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x,y) + \frac{d^2u}{dy^2}(x,y) = 0 \qquad \text{für } (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\,,$$

und leiten Sie die Gleichungen für die *inneren Knoten* her.

7. Wir betrachten die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x,y) + \frac{d^2u}{dy^2}(x,y) = 0 \qquad \text{für } (x,y) \in R$$

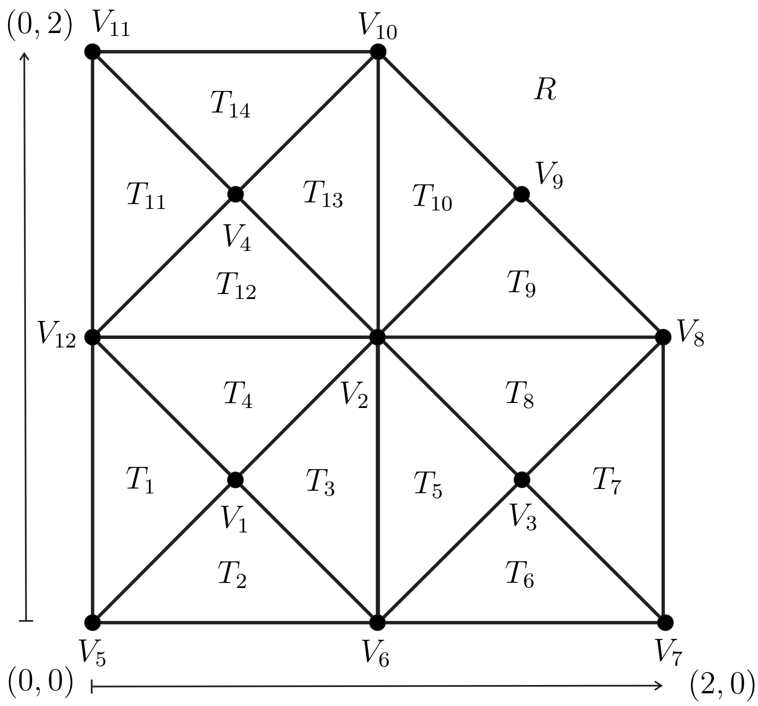

Abbildung 1: Gebiet $R \subset [0,2] \times [0,2]$, die Knoten $(V_j)_{1\leq j\leq 11}$, sowie die Dreiecke $(T_j)_{1\leq j\leq 14}$ für Aufgabe 7.

(mit R wie in wie in Abbildung 1) zu den Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= 0 && \text{für } 0 \leq x \leq 2\,,\\
u(0,y) &= 0 && \text{für } 0 \leq y \leq 2\,,\\
u(x,2) &= x && \text{für } 0 \leq x \leq 1\,,\\
u(2,y) &= x && \text{für } 0 \leq y \leq 1\,,\\
u(1+s,2-s) &= 1 && \text{für } 0 \leq s \leq 1\,.
\end{aligned}
$$

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, welche diese Differentialgleichung mit der Finite-Elemente-Methode löst. Dabei sollen die Knoten $(V_j)_{1\leq j\leq 11}$ und die dreieckigen Teilgebiete $(T_j)_{1\leq j\leq 14}$ wie in Abbildung 1 gewählt werden. Die zugehörigen stückweise linearen Basisfunktionen $(\phi_j)_{1\leq i\leq 11}$ sind dabei so zu wählen, dass $\phi_j(V_j) = 1$ und $\phi_j(V_k) = 0$ für $k \neq j$.

8. Wir betrachten die Telegraphengleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2}(x,t) - c^2\frac{d^2u}{dx^2}(x,t) + 2a\frac{du}{dt}(x,t) \qquad \text{für } (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$$

zu der Anfangsbedingung $u(x,0) = f_0(x)$, $(du/dt)(x,0) = 0$ und den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, welche diese Differentialgleichung mithilfe eines expliziten (in der Zeit) Finiten-Differenzen-Verfahrens löst. Dabei sollen dieser Funktion als Eingabeparameter die Anfangsfunktion f, die Endzeit t_1, die Schrittweiten Δx, Δt, sowie der Parameter c, a übergeben werden. Alle Ableitungen sollen dabei mit symmetrischen finiten Differenzen approximiert werden.

Testen Sie Ihre MATLAB-Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(3\pi x), & \text{falls } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\,, \\ 0, & \text{sonst }\,. \end{cases}$$

und verschiedenen Werten für die Parameter a, c sowie die Schrittweiten Δx und Δt. Beachten Sie, dass das Verhältnis zwischen Δx und Δt richtig gewählt werden muss (ähnlich wie bei der Wellengleichung).