Übungen zu Numerische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen

Markus Grasmair, Markus Haltmeier, Otmar Scherzer

Für den 18.11.2010

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{k\, y(t)}{y(t) + M} \,.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\left(t^2 + 1\right) \frac{dy(t)}{dt} + t y(t) = \frac{1}{2} \,.$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\big(3t - y(t)\big) \frac{dy(t)}{dt} + t = 3y(t) \,.$$

4. Implementieren Sie in Matlab eine Funktion `eulerimplizit.m`, die die Lösung einer Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t)\big) \,, \qquad\qquad y(t_0) = y_0 \,,$$

mithilfe des impliziten Eulerverfahrens

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1}) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

löst. Nehmen Sie dabei an, dass f von der Form $f(t, y) = f_1(t) + f_2(t) y$ ist. Der Funktion `eulerimplizit.m` sollen als Eingabeparameter die Funktionen f_1, f_2, der Anfangswert y_0, die Startzeit t_0, die Endzeit t_1 und die Schrittweite h übergeben werden.

Testen Sie ihre Funktion anhand der Differentialgleichung aus Aufgabe 5 vom ersten Übungsblatt sowie anhand der Aufgabe 2 von diesem Übungsblatt. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen mit den exakten Lösungen.

5. Implementieren Sie in MATLAB eine Funktion `rungekutta.m`, die die Lösung einer Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t)\big)\,, \qquad\qquad y(t_0) = y_0\,,$$

mithilfe des klassischen Runge-Kutta Verfahrens dritter Ordnung löst. Dabei sollen der Funktion `rungekutta.m` als Eingabeparameter die Funktion f, der Anfangswert y_0, die Startzeit t_0, die Endzeit t_1 und die Schrittweite h übergeben werden.

   Testen Sie Ihre Funktion anhand der logistischen Differentialgleichung (Aufgabe 2 vom ersten Übungsblatt).

6. Implementieren Sie in MATLAB eine Funktion `adamsbashforth.m`, die die Lösung einer Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t)\big)\,, \qquad\qquad y(t_0) = y_0\,,$$

mithilfe des Adams-Bashforth Verfahrens löst. Dabei sollen `adamsbashforth.m` als Eingabeparameter die Funktion f, der Anfangswert y_0, die Startzeit t_0, die Endzeit t_1 und die Schrittweite h übergeben werden. Der benötigte Wert y_1 soll dabei mithilfe des Runge-Kutta Verfahrens bestimmt werden.

   Testen Sie Ihre Funktion anhand der logistischen Differentialgleichung (Aufgabe 2 vom ersten Übungsblatt). Vergleichen Sie die Rechenzeiten der drei implementierten Verfahren (explizites Eulerverfahren, Runge-Kutta, Adams Bashforth) um eine vorgegebene Genauigkeit $|y(t_n) - y_n| \leq \text{Tol}$ zu erreichen.