Übungen zu Stetige Optimierung

1. Übungsblatt: 18. April 2013

1. Die *Rosenbrockfunktion* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch
$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2 .$$
Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f. Zeigen Sie weiters, dass f ein eindeutiges globales Minimum besitzt, die Funktion f aber nicht konvex ist, und bestimmen Sie die Kondition von H_f (das Verhältnis von größtem und kleinstem Eigenwert von H_f) im Minimum von f.

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Zeigen Sie, dass f strikt konvex ist, das Newtonverfahren (ohne Liniensuche) aber für Startwerte $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ mit $|x^{(0)}| \geq 1$ nicht gegen das Minimum $x^* = 0$ konvergiert.

3. Implementieren Sie in MATLAB oder OCTAVE die in der Vorlesung besprochenen Liniensuchmethoden nach *Armijo*, *Goldstein und Price* und *Wolfe*.

4. Implementieren Sie in MATLAB oder OCTAVE ein Gradientenabstiegsverfahren mit Liniensuche.

5. Implementieren Sie in MATLAB oder OCTAVE das Newtonverfahren mit Liniensuche. Verwenden Sie dabei zum Lösen des Gleichungssystems $H_f(x)d = -\nabla f(x)$ einen der vordefinierten Solver.

Testen Sie Ihre Algorithmen an den Funktionen `rosenbrock.m`, `himmelblau.m` und `rosenbrockn.m`. Brechen Sie die Iteration im Gradientenverfahren und Newtonverfahren jeweils ab, sobald die Norm $\|\nabla f(x^{(k)})\|$ des Gradienten einen vorgegebenen Wert $\varepsilon > 0$ unterschritten hat. Geben Sie weiters in den Algorithmen eine Maximalanzahl der Iterationen vor.

Hinweis: Achten Sie bei der Implementierung der Liniensuche darauf, dass Sie die Ableitung der eindimensionalen Funktion, auf der Sie die Liniensuche durchführen, korrekt berechnen. Mit der Notation der Vorlesung gilt
$$g'(t) = \nabla f(x+td)^T d .$$
Prüfen Sie beim Newtonverfahren weiters, ob die erhaltene Richtung d tatsächlich eine Abstiegsrichtung ist, und verwenden Sie andernfalls die Richtung $d = -\nabla f(x)$.