Übungen zur VU Bild- und Signalverarbeitung, SS 2012

Übungsleiter: Thomas Fidler

3. Übungsblatt, am 15.05.2012

1. Bearbeiten Sie die noch nicht besprochenen Beispiele des 2. Übungsblattes (Aufgaben 3–6).

2. Gegeben sei eine Funktion $f \in L^1\big((0,\infty);\mathbb{C}\big)$ und es bezeichne $\mathcal{F}_s f$ die Fourier-Sinus-Transformierte beziehungsweise $\mathcal{F}_c f$ die zugehörige Fourier-Kosinus-Transformierte. Zeigen Sie, dass für $g(t) := f(at)\sin(bt)$ mit $a > 0$ und $b > 0$ der Zusammenhang

$$(\mathcal{F}_s g)(\omega) = \frac{1}{2a}\left((\mathcal{F}_c f)\left(\frac{\omega - b}{a}\right) - (\mathcal{F}_c f)\left(\frac{\omega + b}{a}\right)\right)$$

gilt.

3. Berechnen Sie die Fourier-Kosinus-Transformierte der reellwertigen Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(-a^2x^2)$, wobei $a \neq 0$.

4. Zeigen Sie folgendes Theorem über den Zusammenhang der Fouriertransformation einer Funktion und der Fouriertransfomierten ihrer n-ten Ableitung:

Theorem 1. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, d.h. f ist $n-1$ mal stetig differenzierbar, und es gelte für $0 \leq k \leq n-1$, dass*

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0.$$

Weiters sei $f^{(n-1)}$ differenzierbar und $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\big(\mathcal{F}(f^{(n)})\big)(\omega) = (\mathtt{i}\omega)^n(\mathcal{F}f)(\omega).$$

5. **ACHTUNG: Diese Aufgabe ist nicht verpflichtend!**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation eine Lösung der eindimensionalen *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0\,, \quad u\colon \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad a > 0\,,$$

mit Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$, $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Fourier-Transformation der Gleichung bezüglich der Variable x, welche die Aufgabenstellung auf das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert. Verwenden Sie weiters, dass für $at > 0$ die Funktion $\exp(-at\omega^2)$ die Fouriertransformierte der Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2at}} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right)$$

ist.