Übungen zur VU Bild- und Signalverarbeitung, SS 2012

Übungsleiter: Thomas Fidler

2. Übungsblatt, am 26.04.2012

1. Sei $f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x < 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,, \\ +1 & \text{für } 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$
Für welche $s > 0$ gilt $f \in H^s((-\pi,\pi);\mathbb{R})$? Beweisen Sie Ihre Vermutung!

2. Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \in H^1((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ Hölder-stetig mit der Konstanten $C = \|f\|_{H^1((-\pi,\pi);\mathbb{C})}$ und Exponenten $\alpha = 1/2$ ist, d.h. für alle $\theta_1, \theta_2 \in (-\pi,\pi)$ gilt
$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \le \|f\|_{H^1((-\pi,\pi);\mathbb{C})} |\theta_1 - \theta_2|^{1/2}\,.$$

3. Wenden Sie die in `Matlab` integrierte FFT-Routine (Befehl: `fft`) auf die Funktion $f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x-\pi)^2(x+\pi)^2$ an. Vergleichen Sie die theoretisch zu erwartenden Fourierkoeffizienten mit jenen der `Matlab`–Ausgabe und diskutieren Sie das Ergebnis. Was bewirkt der ebenfalls in `Matlab` vorhandene Befehl `fftshift`?

4. Wenden Sie die in `Matlab` integrierte DCT-Routine (Befehl: `dct`) auf die Funktion $f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x-\pi)^2(x+\pi)^2$ an. Vergleichen Sie das Resultat mit jenem vom Aufgabe 3. Studieren Sie die Hilfe von `Matlab` zur Funktion `dct` und erklären Sie etwaige Unterschiede zur Definition der Transformation in der Vorlesung.

5. Berechnen Sie für $-\infty < a < b < \infty$ die Fouriertransformierte der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & x \in [a,b]\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$
Verfahren Sie ebenso mit der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wobei $g(x) := \exp(-|x|)$.

6. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(ax)/x$. Hinweis: Verwenden Sie zuerst, dass
$$\frac{\sin(ax)}{x} = \int_0^a \cos(zx)\,dz$$

und vertauschen Sie anschließend die Integrationsreihenfolge (erlaubt nach Satz von *Fubini*)

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \int_{0}^{a} \ldots \, dz \, dx = \lim_{A\to\infty} \int_{0}^{a} \int_{-A}^{A} \ldots \, dx \, dz.$$

Verwenden Sie zur abschließenden Bestimmung des Grenzwertes, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \pi \, .$$