Übungen zur VU Bild- und Signalverarbeitung, SS 2012

Übungsleiter: Thomas Fidler

1. Übungsblatt, am 24.04.2012

1. Berechnen Sie die komplexe Fourier Reihenentwicklung der reellwertigen Funktion $f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$.

2. Berechnen Sie die reelle Fourier Reihenentwicklung der reellwertigen Funktion $f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2$. Verwenden Sie Matlab, um die Funktion f und deren endliche Reihenentwicklung
$$S_N(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx)$$
mit
$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\,, \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$
für geeignete Werte von N darzustellen. Welches theoretische Resultat untermauert die Eignung der Approximation S_N um f zu nähern?

3. Bearbeiten Sie die vorherige Aufgabenstellung für die reellwertige Funktion $f\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \begin{cases} x(\pi + x) & \text{für } -\pi \le x \le 0\,, \\ x(\pi - x) & \text{für } \quad 0 \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

4. Gegeben sei eine 2π–periodische Funktion $f \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ mit Fourierkoeffizienten α_k, $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Zeigen Sie, dass die um den Wert $s \in \mathbb{R}$ verschobene Funktion
   $$f_s(x) := f(x - s)$$
   die Fourierkoeffizienten $\beta_k = \alpha_k \exp(-\mathtt{i}ks)$, $k \in \mathbb{Z}$, besitzt.
   (b) Zeigen Sie, dass die mit $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ skalierte Funktion
   $$f_m(x) := f(mx)$$
   die Fourierkoeffizienten
   $$\beta_k = \begin{cases} \alpha_{k/m} & \text{für } m \text{ teilt } k \text{ ganzzahlig}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
   besitzt.

5. Seien $f, g \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{R})$ jeweils 2π–periodisch. Dann ist die *Faltung* von f mit g, bezeichnet mit $f * g$, definiert als

$$(f * g)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\, dy\,.$$

Zeigen Sie, dass $f * g \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{R})$ und die Fourierkoeffizienten γ_k von $f * g$ gegeben sind durch

$$\gamma_k = 2\pi\alpha_k\beta_k\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei α_k und β_k, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von f beziehungsweise g bezeichnen.

6. Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x$. Setzen Sie die Funktion f einerseits gerade und andererseits ungerade auf das Intervall $(-\pi,\pi)$ fort. Geben Sie für beide Fortsetzungen die reelle Fourier Reihenentwicklung an und plotten Sie die N-te Partialsumme (siehe Bsp. 2) der jeweiligen Entwicklung für verschiedene $N \in \mathbb{N}$.