Übungsblatt 13B

Beispiel 1 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$).

Zeigen Sie, daß für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und jedes Gebiet $X \subset \mathbb{R}^2$ mit im Gegenuhrzeigersinn orientierter, glatter Randkurve ∂X die Relation

$$\int_X \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x)\right) \mathrm{d}x = \int_{\partial X} v \cdot \mathrm{d}s$$

gilt.

Beispiel 2 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$).

Sei

$$M \coloneqq \{(x_1, x_2, x_1^2 - x_2^2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

und

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right).$$

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds $\nabla \times v$ durch M in Richtung der x_3-Richtung.

Beispiel 3 (Satz von Gauß in $\mathbb{R}^3$).

Wir betrachten die Mantelfläche

$$M \coloneqq \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), 1 - r) \mid r \in [0, 1],\ \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

eines Kegels. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß den Fluß des Vektorfelds

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ v(x) \coloneqq \left(\sqrt{2 + x_2^2}, x_3 \mathrm{e}^{x_1^3}, 1 + x_3\right),$$

vom Inneren des Kegels nach außen durch die Mantelfläche.

Beispiel 4 (Komplexes Wegintegral).

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, deren Rand durch eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert ist, wobei wir annehmen wollen, daß die Kurve den Rand im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

(a) Zeigen Sie, daß die Beziehung

$$\int_0^1 f(\gamma(t))(\gamma_1'(t) + \mathrm{i}\gamma_2'(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right) \mathrm{d}x$$

gilt (die linke Seite ist das sogenannte komplexe Wegintegral von f entlang γ).

(b) Berechnen Sie das Integral für den Fall $f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{x_1 + \mathrm{i}x_2}$.

Beispiel 5 (Elektrostatisches Kraftfeld einer Punktladung).
Wir betrachten das Zentralfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3,\ v(x) \coloneqq \frac{x}{\|x\|^3}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\nabla \cdot v(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt.

(b) Berechnen Sie den Fluß von v durch die Oberfläche

$$\mathbb{S}^2 \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

der Einheitskugel von innen nach außen.

(c) Sei $r\colon \mathbb{S}^2 \to (1, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Folgern Sie mit dem Satz von Gauß, daß der Fluß durch die Fläche

$$M_r \coloneqq \{r(y)y \mid y \in \mathbb{S}^2\}$$

von innen nach außen gleich ist wie der durch $\mathbb{S}^2$.

Beispiel 6 (Green'sche Identität).
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\|x\| \geq \frac{1}{2}$ und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(\|x\|).$$

Wir betrachten für $\varepsilon \in (0,1)$ den Ring $X_\varepsilon \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leq \|x\| \leq 1\}$ und wollen zeigen, daß für jede Folge $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_{\varepsilon_n}} g(x)\Delta f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$$

gilt.

(a) Zeigen Sie, daß $\Delta g(x) = 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(b) Wenden Sie die zweite Green'sche Identität an, um zu sehen, daß

$$\int_{X_\varepsilon} g(x)\Delta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0)} \big(g(y)\nabla f(y) - f(y)\nabla g(y)\big) \cdot \left(-\frac{y}{\|y\|}\right) \mathrm{dS}(y)$$

erfüllt ist, wobei $\partial \mathrm{B}_\varepsilon(0) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| = \varepsilon\}$ den Kreis um den Nullpunkt mit Radius ε bezeichnet.

(c) Berechnen Sie das Integral für eine Funktion f mit der Eigenschaft, daß

$$f(y) = a + b \cdot y \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|y\| \leq \varepsilon$$

ist für ein $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ und Parameter $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^2$.