# Übungsblatt 13A

***Beispiel 1 (Satz von Gauß in $\mathbb{R}^2$).***
Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß den Fluß des Vektorfelds

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v(x,y) \coloneqq \big(x^2y, 3y + \ln(1+x^2)\big),$$

durch den Rand der Menge

$$X \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2 \le y \le x,\ x \in \mathbb{R}\}$$

von innen nach außen.

***Beispiel 2 (Satz von Stokes).***
Bestimmen Sie das Kurvenintegral aus Beispiel 2 vom Übungsblatt 12A, also des Vektorfelds

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) \coloneqq \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

über die geschlossene Kurve

$$M \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 = x_2\},$$

wobei wir die Kurve aus der Richtung $x_1$ betrachtet im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wollen, mit Hilfe des Satzes von Stokes.

***Beispiel 3 (Fluß durch unterschiedliche Flächen).***
Wir betrachten die beiden Flächen

$$M_1 \coloneqq \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\} \text{ und } M_2 \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1,\ x_3 > 0\},$$

die gemeinsam die Oberfläche der oberen Halbkugel mit Radius 1 ergeben, und das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_2} - x_1 \\ \log(1+x_1^2) \\ x_3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß der Fluß von $v$ durch $M_1$ in $x_3$-Richtung gleich dem Fluß von $v$ durch $M_2$ in $x_3$-Richtung ist:

$$\int_{M_1} v \cdot \mathrm{d}S = \int_{M_2} v \cdot \mathrm{d}S,$$

und berechnen Sie ihn.

***Beispiel 4 (Satz von Gauß in $\mathbb{R}^3$).***
Wir betrachten erneut das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) \coloneqq x,$$

und den Torus

$$M \coloneqq \Big\{\big((R + r\cos(\varphi))\cos(\vartheta), (R + r\cos(\varphi))\sin(\vartheta), r\sin(\varphi)\big) \;\Big|\; \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi]\Big\}.$$

aus Beispiel 6 von Übungsblatt 12B.

Berechnen Sie den Fluß von $v$ durch $M$ von innen nach außen diesmal mit Hilfe des Satzes von Gauß.

***Beispiel 5 (Vektorprodukt von Gradientenfeldern).***

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $\partial X$ die glatte Oberfläche eines Gebiets $X$. Zeigen Sie, daß der Fluß

$$\int_{\partial X} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathrm{d}S = 0$$

ist.

***Beispiel 6 (Vektorpotential).***

Bestimmen Sie ein Vektorpotential $w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ für das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \left(\begin{smallmatrix} -x \\ 2y \\ -z-1 \end{smallmatrix}\right),$$

das heißt, $w$ erfülle die Gleichung $v = \nabla \times w$, mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß

$$\nabla \cdot w(x) = 6(x_1 + x_2 + x_3)$$

gelte.