Übungsblatt 12B

Beispiel 1 (Kurvenintegral eines Vektorfelds).
Wir betrachten die durch die Parametrisierung

$$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) := (R\cos(t), R\sin(t), t)$$

gegebene Schraubenlinie und das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

von v entlang γ.

Beispiel 2 (Kurvenintegral über Gradientenfeld).
Seien die Funktionen

$$\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \Phi(x) := \mathrm{e}^{x_2 - x_3}\log(1 + x_1^2),$$

und

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \nabla\Phi(x) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_1 \\ \cos(x_1 x_3) \end{pmatrix},$$

gegeben. Bestimmen Sie das Kurvenintegral des Vektorfelds v entlang der Kurve

$$\gamma\colon [0,\tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) := \big(\cos^2(t), \sin(t), 1\big).$$

Beispiel 3 (Oberflächenintegral).
Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 > 0\}$ die obere Halbkugel und bezeichne

$$f_z\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_z(x) := \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - z \end{pmatrix} \right\|,$$

den Abstand zum Punkt $(0,0,z)$, $z \in (0,1)$.
Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_M \frac{1}{f_z(x)}\,\mathrm{dS}(x).$$

Beispiel 4 (Fluß eines Vektorfelds durch ein Paraboloid).
Wir betrachten das Paraboloid

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}.$$

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2} \end{pmatrix},$$

durch M in negative x_3-Richtung.

Beispiel 5 (Fluß durch die Oberfläche eines Rotationskörpers).

Sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to (0,+\infty)$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß der Fluß des Vektorfelds $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ durch die Oberfläche des durch die Rotation des Graphen der Funktion f entstandenen Rotationskörpers

$$V := \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \mid r \in [0, f(z)],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ z \in [a,b]\}$$

von innen nach außen durch

$$\pi \int_a^b f^2(z)\,\mathrm{d}z$$

gegeben ist.

Beispiel 6 (Fluß durch einen Torus).

Wir betrachten für $0 < r < R$ den Torus

$$M := \big\{\big((R + r\cos(\varphi))\cos(\vartheta), (R + r\cos(\varphi))\sin(\vartheta), r\sin(\varphi)\big) \bigm| \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi]\big\}.$$

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := x,$$

von innen nach außen durch M.