Übungsblatt 12A

Beispiel 1 (Kurvenintegral eines Skalarfelds).
Sei $M \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_2^2 = 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$. Bestimmen Sie das Integral der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq x_1 x_2,$$

über M.

Beispiel 2 (Kurvenintegral über geschlossene Kurve).
Sei

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) \coloneqq \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral von v über die geschlossene Kurve

$$M \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 = x_2\},$$

und entscheiden Sie, ob v ein Gradientenfeld ist.

Beispiel 3 (Oberfläche).
Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers $V \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 2x_2^2 \leq x_3 \leq 1\}$.

Beispiel 4 (Oberfläche eines Rotationskörpers).
Sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to (0,+\infty)$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt der Mantelfläche

$$M \coloneqq \{(f(z)\cos(\varphi), f(z)\sin(\varphi), z) \mid \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [a,b]\}$$

des durch die Rotation des Graphen der Funktion f entstandenen Rotationskörpers durch

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)}\,\mathrm{d}z$$

gegeben ist.

Beispiel 5 (Fluß eines Vektorfelds durch eine Kurve).
Wir betrachten die Ellipse

$$M \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\right\}$$

mit den Halbachsen $a, b > 0$ mit dem nach außen zeigenden Einheitsnormalenfeld $\nu\colon M \to \mathbb{R}^2$.
Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v(x) \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$$

durch M in die Richtung von ν.

Beispiel 6 (Fluß eines Vektorfelds durch eine Wendelfläche).
Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) \coloneqq \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

durch die Fläche $M \coloneqq \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), \varphi) \mid r \in (0,1),\ \varphi \in (0,2\pi)\}$ in positive x_3-Richtung.