# Übungsblatt 11B

***Beispiel 1 (Axialsymmetrisches Feld).***
Sei $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein axialsymmetrisches Feld, das heißt, es habe die Form

$$v(x) := f(x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einer beliebigen stetigen Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, daß $v$ dann ein Gradientenfeld ist, und bestimmen Sie eine Potentialfunktion $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $v = \nabla\Phi$.

***Beispiel 2 (Vektoridentitäten).***
Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal differenzierbare Funktionen und $v, w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Vektorfelder.

Beweisen Sie die Identitäten

***(a)*** $\Delta(fu) = u\Delta f + 2(\nabla f \cdot \nabla)u + f\Delta u$ und

***(b)*** $\nabla \times (v \times w) = (\nabla \cdot w)v - (\nabla \cdot v)w + (w \cdot \nabla)v - (v \cdot \nabla)w$,

wobei wir die Notation

$$(w \cdot \nabla)v := \sum_{j=1}^{3} w_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

verwenden.

***Beispiel 3 (Potential eines Gradientenfelds).***
Bestimmen Sie alle Potentialfunktionen $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \begin{pmatrix} 4x_2x_3^3 - \frac{2}{1+x_1^2} \\ \mathrm{e}^{x_2+x_3}\sqrt{1+x_3^4} + 4x_1x_3^3 \\ (1+2x_3^3+x_3^4)\mathrm{e}^{x_2+x_3}(1+x_3^4)^{-\frac{1}{2}} + 12x_1x_2x_3^2 \end{pmatrix},$$

das heißt, alle Funktionen $\Phi$ mit $\nabla\Phi = v$.

***Beispiel 4 (Gradient in Polarkoordinaten).***
Wir betrachten die Koordinatentransformation

$$\Psi\colon (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \Psi(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),$$

von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten und definieren die entsprechenden (senkrecht auf den Koordinatenlinien stehenden) Basisvektoren

$$e_r(r,\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ und } e_\varphi(r,\varphi) := \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß für jede differenzierbare Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Gradient in Polarkoordinaten als

$$(\nabla\Phi)(\Psi(r,\varphi)) = \frac{\partial(\Phi\circ\Psi)}{\partial r}(r,\varphi)e_r(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial(\Phi\circ\Psi)}{\partial\varphi}(r,\varphi)e_\varphi(r,\varphi)$$

geschrieben werden kann.

***Beispiel 5 (Vektorpotential).***
Bestimmen Sie, für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \begin{pmatrix} ax_1 - 2x_3 \\ -x_2 \\ \mathrm{e}^{x_1} - 1 + \frac{b}{1+x_3^2} \end{pmatrix},$$

ein Vektorpotential $w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ besitzt, also ein Vektorfeld $w$ existiert, das $v = \nabla \times w$ erfüllt.

***Beispiel 6 (Energie- und Drehimpulserhaltung).***
Sei $m \in (0, +\infty)$, $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $V\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $V(\xi) := f(\|\xi\|)$. Zeigen Sie, daß für jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ der Differentialgleichung

$$mx''(t) = -\nabla V(x(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

die Funktionen

***(a)*** $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(t) := \frac{m}{2}x'^2(t) + V(x(t))$, und

***(b)*** $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $L(t) := mx(t) \times x'(t)$,

konstant sind.