Übungsblatt 11A

Beispiel 1 (Zentralfeld).
Sei $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $V\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $V(x) := f(\|x\|)$. Zeigen Sie, daß

$$F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ F(x) = \nabla V(x),$$

ein Zentralfeld ist.

Beispiel 2 (Vektoridentitäten).
Verifizieren Sie die Vektoridentitäten

(a) $\nabla \cdot (u \times v) = (\nabla \times u) \cdot v - (\nabla \times v) \cdot u$ und

(b) $\nabla \times (\nabla \times w) = \nabla(\nabla \cdot w) - \Delta w$

für alle differenzierbaren Vektorfelder $u, v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und alle zweimal differenzierbaren Vektorfelder $w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Beispiel 3 (Gradientenfeld).
Bestimmen Sie, für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \begin{pmatrix} a x_1 x_2 - x_3 \sin(x_1 x_3) \\ x_1^2 + 5 \\ b \ln(1 + x_3^2) - x_1 \sin(x_1 x_3) \end{pmatrix},$$

ein Gradientenfeld ist, also ein differenzierbares Skalarfeld $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $v = \nabla\Phi$ existiert.

Beispiel 4 (Potential eines Gradientenfelds).
Sei das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v(x) := \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} \\ x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + \cos(x_2) \end{pmatrix},$$

gegeben.
Zeigen Sie, daß eine Potentialfunktion $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v = \nabla\Phi$ existiert, und bestimmen Sie sie explizit.
Hinweis: Für jede stetig differenzierbare Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi(x_1, x_2) - \Phi(0,0) = \int_0^{x_1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(t, 0)\,\mathrm{d}t + \int_0^{x_2} \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1, t)\,\mathrm{d}t.$$

Beispiel 5 (Verschwindende Rotation, aber kein Gradientenfeld).
Wir betrachten das Vektorfeld

$$v\colon D \to \mathbb{R}^3,\ v(x) := \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

auf der Menge $D := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, daß $\nabla \times v = 0$ ist, aber keine Potentialfunktion $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^3$ mit $v = \nabla\Phi$ existiert.

Beispiel 6 (Laplace-Gleichung).
Bestimmen Sie alle Parameter $a \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f_a \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f_a(x) \coloneqq \|x\|^a,$$

die partielle Differentialgleichung

$$\Delta f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

erfüllt.