Übungsblatt 9B

Beispiel 1 (Separierbare Differentialgleichung).
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = t(1 - x^2(t))$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0.$$

(a) Skizzieren Sie ein Richtungsfeld der Differentialgleichung (das ist eine Abbildung $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jedem Punkt $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$ einen Tangentialvektor an den Graphen der Lösung x mit $x(t) = \xi$ zuweist, also zum Beispiel $v(t, \xi) := (1, t(1 - \xi^2))$).

(b) Bestimmen Sie, welche Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}$ zu einer konstanten Lösung $x(t) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ führen.

(c) Berechnen Sie für beliebige Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung $x\colon (-\delta_1, \delta_2) \to \mathbb{R}$ und geben Sie die größtmöglichen Werte $\delta_1, \delta_2 \in (0, \infty)$ an, für die die Lösung existiert.

Beispiel 2 (Homogene Differentialgleichung).
Bestimmen Sie für allgemeine Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0$$

mit $t_0 > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ jeweils die Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$x'(t) = \mathrm{e}^{\frac{x(t)}{t}} + \frac{x(t)}{t} - 1,\ t > t_0,$$

mit maximal möglichem Definitionsbereich $I \subset [t_0, \infty)$, $t_0 \in I$.

Beispiel 3 (Bernoullische Differentialgleichung).
Seien $a, b \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $b \le a^2(n-1)$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung $x\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) + ax(t) = btx^n(t),\ t \in (0, \infty),$$
$$x(0) = 1.$$

Hinweis: Die Substitution $y(t) := x^{1-n}(t)$ führt zu einer linearen Differentialgleichung.

Beispiel 4 (Substitution von Ableitungen).
Bestimmen Sie für den größtmöglichen Parameter $a \in (1, \infty)$ die Lösung $x\colon [1, a) \to \mathbb{R}$, der Differentialgleichung

$$x''(t) = x'^2(t) \ln(t),\ t \in (1, a),$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(1) = 0 \text{ und } x'(1) = 1.$$

Beispiel 5 (Substitutionsmethode).

Sei $x_0 \in [0, +\infty)$. Bestimmen Sie die Lösung $x\colon [0, +\infty)$ der Differentialgleichung

$$x'(t) + x(t) + (\sin(t) + \mathrm{e}^t)x^3(t) = 0, \ t \in (0, +\infty),$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die durch $y(t) := \frac{1}{x^2(t)}$ gegeben Funktion, sofern $x(t) \neq 0$ ist.

Beispiel 6 (Variation der Konstanten).

Finden Sie die Lösung $x\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t} = (t-1)^2, \ t \in (1, \infty),$$
$$x(1) = 0.$$