

ÜBUNGSBLATT 8B

Beispiel 1 (Mehrwertige Funktionen).

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

(a) $z^5 = -16\sqrt{3} + 16i$,

(b) $\ln(3z^2) = 2\pi e^{-i\frac{\pi}{6}}$,

(c) $\exp(\sqrt{z}) = 1 + i$.

Beispiel 2 (Normalform von komplexen Wurzeln).

(a) Schreiben Sie die Wurzel

$$\sqrt{8i - 15}$$

in Normalform.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - z + 4 - 2i = 0$$

und stellen Sie sie in Normalform dar.

Beispiel 3 (Gleichungen mit rationalen Exponenten).

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^{\frac{4}{3}} = -1 - \sqrt{3}.$$

Beispiel 4 (Kreistreue).

Seien $c, d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|c| \neq |d|$. Zeigen Sie, daß die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(\varphi) := \frac{1}{ce^{i\varphi} + d},$$

einen Kreis um den Mittelpunkt $\frac{d^*}{|d|^2 - |c|^2}$ parametrisiert, und bestimmen Sie dessen Radius $R \in (0, \infty)$.

Beispiel 5 (Geometrische Summe).

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

(a) $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikz} = \frac{1 - e^{inz}}{1 - e^{iz}}$ und

(b) $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kz) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n - \frac{1}{2})z)}{2\sin(\frac{z}{2})}$

gilt.

Beispiel 6 (Parametrisierungen von Gebieten in der komplexen Ebene).

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebiets

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + iy - i| + |x + iy + i| = 4\}.$$