

## ÜBUNGSBLATT 8B

### *Beispiel 1 (Mehrwertige Funktionen).*

Bestimmen Sie alle Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichungen

(a)  $z^5 = -16\sqrt{3} + 16i$ ,

(b)  $\ln(3z^2) = 2\pi e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ,

(c)  $\exp(\sqrt{z}) = 1 + i$ .

### *Beispiel 2 (Normalform von komplexen Wurzeln).*

(a) Schreiben Sie die Wurzel

$$\sqrt{8i - 15}$$

in Normalform.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - z + 4 - 2i = 0$$

und stellen Sie sie in Normalform dar.

### *Beispiel 3 (Gleichungen mit rationalen Exponenten).*

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^{\frac{4}{3}} = -1 - \sqrt{3}.$$

### *Beispiel 4 (Kreistreue).*

Seien  $c, d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $|c| \neq |d|$ . Zeigen Sie, daß die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(\varphi) := \frac{1}{ce^{i\varphi} + d},$$

einen Kreis um den Mittelpunkt  $\frac{d^*}{|d|^2 - |c|^2}$  parametrisiert, und bestimmen Sie dessen Radius  $R \in (0, \infty)$ .

### *Beispiel 5 (Geometrische Summe).*

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, daß für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

(a)  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikz} = \frac{1 - e^{inz}}{1 - e^{iz}}$  und

(b)  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kz) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n - \frac{1}{2})z)}{2\sin(\frac{z}{2})}$

gilt.

### *Beispiel 6 (Parametrisierungen von Gebieten in der komplexen Ebene).*

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebiets

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + iy - i| + |x + iy + i| = 4\}.$$