

## ÜBUNGSBLATT 8A

### **Beispiel 1 (Umformen auf Normalform).**

Schreiben Sie die komplexen Zahlen

(a)  $\frac{1+i}{(2-i)(1+3i)}$ ,

(b)  $3e^{-i\frac{\pi}{6}}(2+4i)$  und

(c)  $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2}\right)^5$

jeweils in Normalform (das heißt in der Form  $x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

### **Beispiel 2 (Lösen von Gleichungen in den komplexen Zahlen).**

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

(a)  $z^6 + 64i = 0$ ,

(b)  $\log(1+z^2) = \frac{\pi}{4}i$  und

(c)  $e^{2z} = 2 + 2i$ .

### **Beispiel 3 (Lösen quadratischer Gleichungen).**

Schreiben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 = -5 + 12i$$

in Normalform.

### **Beispiel 4 (Zerlegen von Polynomen in Linearfaktoren).**

Wir betrachten die quartische Polynomfunktion

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, p(z) = \frac{z^4}{2} - z^3 + \frac{3}{2}z^2 - z + 1,$$

für die  $p(i) = 0$  ist.

Bestimmen Sie Parameter  $a, z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  so, daß

$$p(z) = a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt.

### **Beispiel 5 (Additionstheoreme).**

Zeigen Sie, daß die Funktionen  $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ , und  $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ , die Identitäten

(a)  $8\cos^4(z) = \cos(4z) + 4\cos(2z) + 3$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und

(b)  $2\sin(w)\cos(z) = \sin(w+z) + \sin(w-z)$  für alle  $w, z \in \mathbb{C}$

erfüllen.

### **Beispiel 6 (Partialbruchzerlegung in $\mathbb{C}$ ).**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{(3+i)x + 3-i}{(x-i)^2(x+1)} dx \in \mathbb{C}.$$