Übungsblatt 7B

Beispiel 1 (Mehrdimensionales Integral).
Sei

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \le y \le \sin(x),\ y \le \cos(x),\ x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A xy \,\mathrm{d}(x,y).$$

Beispiel 2 (Volumen eines Tetraeders).
Seien

$$a \coloneqq (1,0,1),\ b \coloneqq (2,1,1) \text{ und } c \coloneqq (\lambda,-1,2).$$

Bestimmen Sie einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß das Tetraeder

$$V \coloneqq \{xa + yb + zc \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\},$$

das ist die Pyramide mit den Ecken $(0,0,0)$, a, b und c, das Volumen 1 hat.

Beispiel 3 (Integration über ein Polyeder).
Berechnen Sie das Integral

$$\int_V x \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

über die Menge $V \coloneqq \{(x,y,z) \in [0,+\infty[^3 \mid 1 \le x+y+z \le 3\}$.

Beispiel 4 (Integrationsreihenfolge).
Sei

$$A \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \le 0\}$$

die untere Hälfte der Kugel um den Nullpunkt mit Radius 1 und

$$B \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le (1-z)^2,\ z \in [0,1]\}$$

der darauf stehende Kreiskegel mit der Spitze in $(0,0,1)$. Zudem sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion.

Bestimmen Sie geeignete Funktionen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, für die

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{c(z)}^{d(z)} \left(\int_{\gamma(x,z)}^{\delta(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z\end{aligned}$$

gilt.

Beispiel 5 (Schwerpunkt eines Kegels).
Bestimmen Sie den Schwerpunkt

$$\int_V \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \varrho(x, y, z) \,\mathrm{d}(x, y, z)$$

des Kegels $V \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4z^2,\ z \in \,]0, 1[\}$ mit der Massendichte

$$\varrho\colon V \to \mathbb{R},\ \varrho(x, y, z) = x + z \ln(1 + x^2 + y^2).$$

Beispiel 6 (Integration über eine Kugel).
Berechnen Sie das Integral

$$\int_V \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}(x, y, z)$$

über die Kugel $V \coloneqq \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < R\}$ mit Radius $R \in \,]0, +\infty[$.