Übungsblatt 7A

Beispiel 1 (Mittlere Geschwindigkeit).

Es beschreibe

$$v\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3,\ v(t) := \begin{pmatrix} t^2+\cos(\pi t) \\ \arctan(t) \\ \sin^2(2\pi t) \end{pmatrix},$$

die Geschwindigkeit eines Teilchens als Funktion der Zeit. Berechnen Sie seine mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0,2]$.

Beispiel 2 (Integrationsgrenzen).

Sei

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$$

der Kreis um $(1,1)$ mit Radius 1 und

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x,y) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \le 0\}$$

die durch die durch den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ gehende und in Richtung $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ laufende Gerade berandete, untere Halbene. Zudem sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion.

Bestimmen Sie Funktionen $a, b, c, d\colon [0,2] \to [0,2]$, für die

$$\int_{A\cap B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^2 \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

gilt.

Beispiel 3 (Integration über Halbkreis).

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \frac{x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

über den Halbkreis $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1,\ x > 0\}$.

Beispiel 4 (Volumen eines Hyperboloids).

Seien $a, b \in (0,\infty)$ und

$$V := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{a^2}(x^2+y^2) - \frac{z^2}{b^2} < 1,\ -b < z < b \right\}$$

das Rotationshyperboloid mit Halbachsen a und b zwischen $z = -b$ und $z = b$. Berechnen Sie das Volumen von V.

Beispiel 5 (Gesamtladung einer Kugel).

Sei $R > 0$ und $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < R^2\}$ eine Kugel mit Radius R. Die Kugel sei elektrisch geladen mit der Ladungsdichte

$$\varrho\colon V \to \mathbb{R},\ \varrho(x,y,z) := x^2.$$

Berechnen Sie die Gesamtladung

$$Q := \int_V \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$

der Kugel.

Beispiel 6 (Masse einer Hohlkugel).

Wir betrachten eine Hohlkugel

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 < R^2\} \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y < 0\},$$

mit in Metern gemessenem Innenradius $r = \frac{1}{2}$ und Außenradius $R = 1$, aus der ein Viertel herausgeschnitten ist. Die Massedichte der Hohlkugel in Kilogramm pro Kubikmeter sei dabei durch die Funktion

$$\varrho\colon V \to \mathbb{R},\ \varrho(x, y, z) := 10^3 \left(1 + \tfrac{1}{R}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$

gegeben.

Bestimmen Sie die in Kilogramm gemessene Gesamtmasse

$$m := \int_V \varrho(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z)$$

der Hohlkugel.