Übungsblatt 6B

Beispiel 1 (Uneigentliches Integral).

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^x + 3 + 2\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{\mathrm{e}^x + 3 + 2\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 2 (Cauchy-Hauptwert).

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon [-1,2],\ f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in [-1,2]\setminus\{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

nicht über $[-1,2]$ integrierbar ist (also das Integral $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht wohldefiniert ist), und berechnen Sie stattdessen den sogenannten Cauchy-Hauptwert

$$\mathrm{P}\int_{-1}^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

der Funktion f.

Beispiel 3 (Stammfunktionen).

Sei $g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ eine gegebene, zweimal stetig differenzierbare Funktion.

Bestimmen Sie die Stammfunktionen von

(a) $f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x) = g'(x)\exp(-g(x))$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{g'(x)}{g^\alpha(x)}$ für beliebiges $\alpha\in\mathbb{R}$ und

(c) $f_3\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_3(x) = \big(g'(x)\big)^2 + g(x)g''(x)$.

Beispiel 4 (Extremwerte einer Stammfunktion).

Berechnen sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,$$

und bestimmen Sie jeweils, ob es sich dabei um eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder einen Sattelpunkt handelt.

Beispiel 5 (Bogenlänge eines Graphen).

Sei $z > 1$ beliebig. Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion

$$f\colon [1,z]\to\mathbb{R},\ f(x) := \ln(x).$$

Hinweis: Das Integral $\int_1^z \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$ läßt sich mit Hilfe der Substitution $y = \sqrt{1+x^2}$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen.

Beispiel 6 (Weierstraß-Substitution).
Wir betrachten die bijektive und stetig differenzierbare Funktion

$$G\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ G(x) = \tan(\tfrac{x}{2}).$$

(a) Beweisen Sie für alle $x \in (-\pi, \pi)$ die Identitäten

$$\sin(x) = \frac{2G(x)}{1 + G^2(x)},\ \cos(x) = \frac{1 - G^2(x)}{1 + G^2(x)} \text{ und } G'(x) = \frac{1}{2}(1 + G^2(x)).$$

(b) Folgern Sie, daß für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(\sin(x), \cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_{G(a)}^{G(b)} f\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

gilt.

(c) Berechnen Sie damit das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$