

ÜBUNGSBLATT 6A

Beispiel 1 (Substitutionsregel).

Berechnen Sie die Integrale

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \, dx,$$

$$(b) \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx,$$

$$(c) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} \, dx.$$

Beispiel 2 (Partielle Integration).

Berechnen Sie die Integrale

$$(a) \int_0^1 x^3 e^{-x} \, dx,$$

$$(b) \int_1^2 \ln^2(x) \, dx,$$

$$(c) \int_2^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx.$$

Beispiel 3 (Partialbruchzerlegung).

Finden Sie eine Stammfunktion $F: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der Funktion

$$f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)^2(x + 1)}.$$

Beispiel 4 (Bogenlänge einer parametrisierten Kurve).

Wir betrachten die logarithmische Spirale:

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) := (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Bestimmen Sie die Bogenlänge

$$\int_{\gamma|_{[0, \varphi]}} ds = \int_0^\varphi \|\gamma'(t)\| \, dt$$

der Kurve $\gamma|_{[0, \varphi]}$ für beliebiges $\varphi > 0$.

Beispiel 5 (Volumen eines Rotationskörpers).

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + |z| \leq x^2 + y^2 \leq \frac{2}{\sqrt{4z^2 - 4z + 9}}, z \in [-1, 1] \right\}.$$

Beispiel 6 (Iterierte Integrale).

Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y+yx^2}} dy \right) dx$ und

(b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y+yx^2}} dx \right) dy.$