

## ÜBUNGSBLATT 6A

### **Beispiel 1 (Substitutionsregel).**

Berechnen Sie die Integrale

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \, dx,$$

$$(b) \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx,$$

$$(c) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} \, dx.$$

### **Beispiel 2 (Partielle Integration).**

Berechnen Sie die Integrale

$$(a) \int_0^1 x^3 e^{-x} \, dx,$$

$$(b) \int_1^2 \ln^2(x) \, dx,$$

$$(c) \int_2^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx.$$

### **Beispiel 3 (Partialbruchzerlegung).**

Finden Sie eine Stammfunktion  $F: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  der Funktion

$$f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)^2(x + 1)}.$$

### **Beispiel 4 (Bogenlänge einer parametrisierten Kurve).**

Wir betrachten die logarithmische Spirale:

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) := (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Bestimmen Sie die Bogenlänge

$$\int_{\gamma|_{[0, \varphi]}} ds = \int_0^\varphi \|\gamma'(t)\| \, dt$$

der Kurve  $\gamma|_{[0, \varphi]}$  für beliebiges  $\varphi > 0$ .

### **Beispiel 5 (Volumen eines Rotationskörpers).**

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + |z| \leq x^2 + y^2 \leq \frac{2}{\sqrt{4z^2 - 4z + 9}}, z \in [-1, 1] \right\}.$$

**Beispiel 6 (Iterierte Integrale).**

Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale

(a)  $\int_0^1 \left( \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y+yx^2}} dy \right) dx$  und

(b)  $\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y+yx^2}} dx \right) dy.$