Übungsblatt 5B

Beispiel 1 (Kurvendiskussionen).
Wir betrachten die Funktionen

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \arcsin(\sin(x))$ und

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{(x-1)^2} & \text{für } x \neq 1, \\ 0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g, indem Sie ihre Singularitäten, lokale Extremalstellen, Grenzwerte im Unendlichen und die Intervalle, auf denen sie monoton sind, bestimmen.

Beispiel 2 (Orthogonale Projektion).
Sei $x \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt in der Ebene und

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := a + vt$$

mit $a \in \mathbb{R}^2$ und $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Parametrisierung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie den Punkt $z \in \{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ auf der Geraden so, daß der Vektor $x - z$ senkrecht auf der Geraden steht.

(b) Zeigen Sie, daß dieser Punkt z von allen Punkten auf der Gerade den kleinsten Abstand zu x hat, das heißt, ist $z = \gamma(\tau)$, so hat die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := \|x - \gamma(t)\|^2,$$

in τ ein Minimum.

Beispiel 3 (Tangente an eine Kurve).
Bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für den die Tangente $T_{\alpha,\beta}$ an die Kurve

$$\gamma_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_{\alpha,\beta}(t) := \big(2t^2, \mathrm{e}^{t-1} - \alpha t, \tfrac{1}{2}(t^3 + \beta)\big)$$

im Punkt $\gamma_{\alpha,\beta}(1)$ durch den Nullpunkt geht.

Beispiel 4 (Kettenregel).
Sei

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(\rho, \varphi) := \rho^2 \cos(2\varphi).$$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$G\colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ G(x, y) := F(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(\tfrac{y}{x})),$$

indem Sie die Kettenregel verwenden, und vergleichen Sie Ihr Resultat mit demjenigen, das Sie durch vorheriges Umformen von G auf

$$G(x, y) = x^2 - y^2$$

bekommen.

Beispiel 5 (Implizite Funktionen).

Wir betrachten ein Teilchen mit Masse $m > 0$, das sich im Potential

$$V\colon (0,\infty) \to (0,\infty),\ V(r) := \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r},$$

bewege (also an der Stelle r der Kraft $-V'(r)$ ausgesetzt ist). Bezeichnen wir mit $r_{\mathrm{t}}\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ die Position und mit $v_{\mathrm{t}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion der Zeit, so bleibt die Energie erhalten, es existiert also ein $E \in (0,\infty)$ mit

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E \text{ für alle } (r,v) \in \{(r_{\mathrm{t}}(t), v_{\mathrm{t}}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß zu jeder Geschwindigkeit $v \in (-v_0, v_0)$ genau eine Position $r_{\mathrm{v}}(v) \in (0,\infty)$ mit

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r_{\mathrm{v}}(v)) = E$$

existiert, wobei $v_0 := \sqrt{\frac{2E}{m}}$ sei.

(b) Zeigen Sie weiters, daß die Ableitung von r_{v} die Gleichung

$$r_{\mathrm{v}}'(v) = -\frac{mv}{V'(r_{\mathrm{v}}(v))} \text{ für alle } v \in (-v_0, v_0).$$

erfüllt.

Beispiel 6 (Riemann-Summe).

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x,$$

indem Sie es als Grenzwert

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_{k,n} - x_{k-1,n}) \max_{x \in [x_{k-1,n}, x_{k,n}]} \{x^2\}$$

mit den für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ äquidistant gewählten Zwischenpunkten $x_{k,n} := \frac{k}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, schreiben.

Hinweis: Mit vollständiger Induktion kann man die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

verifizieren.