

ÜBUNGSBLATT 5A

Beispiel 1 (Kurvendiskussionen).

Wir betrachten die Funktionen

$$(a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := xe^{-\frac{1}{2}x^2},$$

$$(b) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f , g und h , indem Sie ihre Singularitäten, lokale Extremalstellen, Grenzwerte im Unendlichen und die Intervalle, auf denen sie monoton sind, bestimmen.

Beispiel 2 (Partielle Ableitungen).

Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) := \begin{pmatrix} e^{\frac{x}{1+y^2}} \\ x^2yz^3 + \tanh(\sqrt{1+yz}) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3 (Kettenregel).

Berechnen Sie mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \ln(\|x\|).$$

Beispiel 4 (Tangentialebene).

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \frac{x-y}{1+x^2+y^2}.$$

(a) Berechnen Sie die Tangentialebene an den Graphen

$$\mathcal{G}_f := \{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

der Funktion f in einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Stellen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, an denen diese Tangentialebene parallel zur x - y -Ebene ist.

Beispiel 5 (Tangente an eine Kurve).

Sei die Kurve

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^3 + 1 = 0\}$$

gegeben.

(a) Finden Sie eine Parametrisierung der Kurve C , also eine stetige, injektive Funktion $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$C = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Bestimmen Sie die Tangente an C im Punkt $(0, 1)$.

Beispiel 6 (Tangente an Niveaulinie).

Bestimmen Sie die Tangente an die Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

in einem Punkt $(x_0, y_0) \in E$.