Übungsblatt 4B

Beispiel 1 (Lineare Abhängigkeit von Vektoren).
Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Beispiel 2 (Volumen eines Parallelepipeds).
Bestimmen Sie einen Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$, für den das durch die Vektoren

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } c := 2 \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\vartheta)\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

aufgespannte Parallelepiped das Volumen 1 hat.

Beispiel 3 (Rotation in $\mathbb{R}^3$).
Seien $a, x \in \mathbb{R}^3$ zwei linear unabhängige Vektoren mit $\|a\| = 1$.

(a) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$(a \times x) \times a, \ a \times x, \ a$$

eine positiv orientierte, orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Zeigen Sie weiters, daß man durch Rotation des Vektors x um den Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ um die Achse a gerade den Vektor

$$\cos(\varphi)(a \times x) \times a + \sin(\varphi) a \times x + (a \cdot x)a$$

bekommt.

Beispiel 4 (Orthogonalisierung).
Seien in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } z := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^3$, der parallel zu x ist (also $v_1 = \lambda x$ mit $\lambda > 0$ erfüllt) und die Länge 1 hat.

(b) Berechnen Sie den Vektor $v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit Länge 1, der in der von x und y aufgespannten Ebene liegt, senkrecht zu v_1 ist, und so, daß der Winkel zwischen v_2 und y kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.

(c) Bestimmen Sie schließlich $v_3 \in \mathbb{R}^3$ mit Länge 1, der senkrecht auf v_1 und auf v_2 steht und so, daß die Vektoren v_1, v_2, v_3 positiv orientiert sind.

(d) Bestimmen Sie Koeffizienten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \mathbb{R}$, für die

$$z = \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 + \zeta_3 v_3 \text{ gilt.}$$

Beispiel 5 (Lösung einer Differentialgleichung).
Bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)),$$

die Differentialgleichung

$$u'(x) + 2u(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

Beispiel 6 (Differenzierbarkeit stückweise definierter Funktionen).
Bestimmen Sie, in welchen Punkten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \in (0,\infty), \\ \cos(x) & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \\ \sqrt{|x| - \frac{\pi}{2}} & \text{für } x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung an diesen Stellen.