Übungsblatt 4A

Beispiel 1 (Reguläres Tetraeder).
Wir betrachten ein reguläres Tetraeder, von dem die beiden Eckpunkte $A := (0,0,0)$ und $B := (1,1,1)$ gegeben seien. Zudem liege eine Fläche in der durch die Punkte A und B und den Vektor $a := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Ebene.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, wo die anderen beiden Eckpunkte liegen können.

Beispiel 2 (Lagrange-Identität).
Beweisen Sie die für alle $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$ geltende Identität

$$(u \times v) \cdot (x \times y) = (u \cdot x)(v \cdot y) - (u \cdot y)(v \cdot x).$$

Beispiel 3 (Fluß durch eine Kreisfläche).
Berechnen Sie betragsmäßig den Fluß des konstanten Geschwindigkeitsfelds mit Geschwindigkeit $v := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ durch die Kreisfläche

$$B := \{M + \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - M\| < R\}$$

mit Mittelpunkt $M := (-2, 5, 1)$ und Radius $R := 3$ in der durch diesen Mittelpunkt M gehenden und durch die Vektoren $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Ebene.

Beispiel 4 (Ableitung über den Differenzenquotienten).
Berechnen Sie die Ableitung der durch

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

definierten Cosinusfunktion, indem Sie explizit den Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen.

Beispiel 5 (Berechnen von Ableitungen).
Bestimmen Sie die Mengen auf denen die Funktionen

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) := \arcsin(\sin(x))$,

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) := \sqrt[3]{x}$ und

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) := \dfrac{\tan(\mathrm{e}^{\sin(x)})}{\sqrt{1+x^2}}$.

differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

Beispiel 6 (Ableitung der inversen Funktion).
Bestimmen Sie die Ableitung des Tangens hyperbolicus

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \left]-1, 1\right[,\ \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

und leiten Sie daraus diejenige des Areatangens hyperbolicus her.