Übungsblatt 3B

Beispiel 1 (Konstruktion eines Dreiecks).

Seien $A := (1, -2)$ und $B := (3, 0)$. Bestimmen Sie einen Punkt C, für den das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C bei A einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ und bei C einen Winkel von $\frac{\pi}{6}$ hat.

Beispiel 2 (Kreisbestimmung).

Wir betrachten die drei Punkte

$$A := (1, 2),\ B := (3, 1) \text{ und } C := (-1, -1)$$

in der Ebene.

(a) Geben Sie die Mittelsenkrechte auf die Strecke von A nach B und die Mittelsenkrechte auf die Strecke von A nach C an.

(b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises, der durch die drei Punkte A, B und C geht.

Beispiel 3 (Schnitt von Kugel und Gerade).

Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Geraden

$$L := \{(2, 2, 1) + \lambda(1, 0, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und der Kugeloberfläche

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - (1, 2, 1)\| = 2\}.$$

Beispiel 4 (Schnittpunkt von parametrisierten Kurven).

Es sollen

$$x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ x(t) := x_0 + vt + \frac{1}{2}gt^2, \text{ und}$$
$$y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ y(t) := y_0 + w(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2,$$

die Positionen zweier Teilchen im Raum als Funktion der Zeit beschreiben. Dabei bezeichnen $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^3$ die Startpositionen, $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die Anfangsgeschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$ beziehungsweise zur Zeit $t = t_0 \in \mathbb{R}$ und $g = (0, 0, -1)$ sei die Erdbeschleunigung (in geeigneten Einheiten), der beide Teilchen gleichermaßen ausgesetzt seien.

Wir wählen $x_0 = (0, 0, 0)$, $y_0 = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ und $w = (a, 2, 1)$ mit unbekanntem $a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie (für beliebig gewählten Parameter $t_0 \in \mathbb{R}$) den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, daß die Spuren $x(\mathbb{R})$ und $y(\mathbb{R})$ der Kurven x und y einen Schnittpunkt besitzen, das heißt, es sollen zwei Kurvenparameter $s, t \in \mathbb{R}$ mit $x(s) = y(t)$ existieren.

(b) Bestimmen Sie für diesen Parameter a die Zeitverschiebung $t_0 \in \mathbb{R}$ so, daß es einen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ gibt, an dem sich die beiden Teilchen treffen, also $x(t) = y(t)$ gilt.

Beispiel 5 (Parameterdarstellung einer Ellipse in Polarkoordinaten).

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Ellipse

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}$$

mit den Halbachsen $a, b \in \,]0, +\infty[$ in Polarkoordinaten, geben Sie also eine Funktion $r\colon [0, 2\pi[\,\to\,]0, +\infty[$ an, für die

$$E = \big\{ r(\varphi)\big(\cos(\varphi, \sin(\varphi)\big) \;\big|\; \varphi \in [0, 2\pi[\big\}$$

ist.

Beispiel 6 (Parameterdarstellung eines Zylinders in Kugelkoordinaten).

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung des unendlich langen Kreiszylinders mit der z-Achse als Zylinderachse und dem Radius ρ in Kugelkoordinaten, das heißt, geben Sie eine Funktion $r\colon]0, \pi[\times [0, 2\pi[\,\to\,]0, +\infty[$ an, für die

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = \rho^2\} = \big\{ r(\vartheta, \varphi)\big(\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \sin(\vartheta)\sin(\varphi), \cos(\vartheta)\big) \;\big|\; \vartheta \in \,]0, \pi[,\ \varphi \in [0, 2\pi[\big\}$$

gilt.