

ÜBUNGSBLATT 3A

Beispiel 1 (Winkelberechnung).

Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A := (2, 4, 3), B := (3, 5, 4), \text{ und } C := (2, 4 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Beispiel 2 (Rotation und Translation).

Wir betrachten den Punkt $P := (2, 1)$. Es bezeichne weiters Q den Punkt mit Abstand 3 zum Nullpunkt und Winkel $\frac{5\pi}{3}$ zum Basisvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rotieren Sie den Punkt P zuerst um den Winkel $-\frac{\pi}{6}$ um den Nullpunkt und verschieben den rotierten Punkt P_1 anschließend um den Ortsvektor des Punkts Q . Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten des dabei erhaltenen Punkts P_2 .

Bekommt man das gleiche Resultat, wenn man den Punkt P zuerst verschiebt und dann um den Nullpunkt rotiert?

Beispiel 3 (Umrechnen von Koordinaten).

(a) Schreiben Sie den Punkt $(2\sqrt{3} - 4, 2)$ in Polarkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten (x, y) des Punkts, dessen Ortsvektor die Länge 3 hat und im Winkel $-\frac{\pi}{3}$ zum Basisvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht.

(c) Schreiben Sie den Punkt $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(d) Geben Sie die kartesischen Koordinaten (x, y, z) aller Punkte an, deren Ortsvektor die Länge 3 hat, den Winkel $\frac{\pi}{6}$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bildet und deren Abstand zur x - z -Ebene $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ist.

Beispiel 4 (Normalenvektor an eine Ebene).

Wir betrachten die Menge

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}.$$

Überzeugen Sie sich davon, daß dies eine Ebene in \mathbb{R}^3 beschreibt, und bestimmen Sie einen Einheitsvektor $n \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf dieser Ebene steht.

Beispiel 5 (Gleichschenkliges Trapez).

Bestimmen Sie den vierten Eckpunkt C des ebenen, gleichschenkligen Trapezes mit den drei Eckpunkten

$$A := (-1, 2, 0), B := (2, 2, 3), D := (-1, 3, 1),$$

wobei die Strecke zwischen A und B die Grundseite sei.

Beispiel 6 (Satz des Thales).

Sei $A := (-1, 0, 0)$, $B := (1, 0, 0)$ und

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

die Einheitskugel.

(a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $C - A$ und $C - B$ für jeden Punkt $C \in M$ senkrecht aufeinander stehen.

(b) Für welchen Wert $\lambda \in (0, \infty)$ ist der Winkel zwischen den Vektoren $(0, 0, \lambda) - A$ und $(0, 0, \lambda) - B$ gerade $\frac{\pi}{4}$?