Übungsblatt 2A

Beispiel 1 (Lösungsmengen von Ungleichungen).

Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen $x \in \mathbb{R}$

(a) der Ungleichung $(x-1)^2 < 4$,

(b) der Ungleichung $\mathrm{e}^x - 1 \leq -x$,

(c) der Ungleichung $|x-1|\,x \leq x$.

Beispiel 2 (Lösen von kubischen Gleichungen mit einer bekannten Nullstelle).

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der kubischen Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0,$$

wenn Sie wissen, daß $x = 1$ eine Lösung ist.

Beispiel 3 (Injektivität und Surjektivität von zusammengesetzten Funktionen).

Seien X, Y und Z Mengen und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zwei Funktionen.

(a) Zeigen Sie, daß $g \circ f$ injektiv ist, falls f und g injektiv sind.

(b) Zeigen Sie, daß $g \circ f$ surjektiv ist, falls f und g surjektiv sind.

(c) Zeigen Sie, daß f injektiv ist, wenn $g \circ f$ injektiv ist.
Muß in dem Fall auch die Funktion g injektiv sein?

(d) Zeigen Sie, daß g surjektiv ist, wenn $g \circ f$ surjektiv ist.
Muß in dem Fall auch die Funktion f surjektiv sein?

Beispiel 4 (Inverse des Sinus hyperbolicus).

Zeigen Sie, daß der Sinus hyperbolicus

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh(x) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}),$$

bijektiv ist, und berechnen Sie seine inverse Funktion.

Beispiel 5 (Beziehungen zwischen inversen Funktionen).

Folgern Sie aus der Identität $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, daß die Beziehung

$$\arccos\left(\sqrt{1-y}\right) = \arcsin\left(\sqrt{y}\right) \text{ für alle } y \in [0,1]$$

gilt.

Beispiel 6 (Kurve als Graph einer Funktion).

Wir betrachten für gegebene Parameter $a, b \in (0, \infty)$ die Kurve

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\cosh(t) \\ b\sinh(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D := \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{x} > 0\}$, für die die Gleichung $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{x} = x(t)$ und $\tilde{y} = y(t)$ existiert.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph über der y-Achse gerade mit der Spur der Kurve übereinstimmt, was bedeute, daß

$$\{(g(\tilde{y}), \tilde{y}) \mid \tilde{y} \in \mathbb{R}\} = \{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

gelte.