Übungsblatt 1A

Beispiel 1 (Polynomdivision).
Bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\frac{6x^5 - 2x^4 + 17x^3 - 7x^2 + 12x - 4}{2x^2 + 3} = ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{ex + f}{2x^2 + 3} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Beispiel 2 (Umkehrfunktion einer Komposition).
Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f\colon [1,2] \to [-1,0],\ f(x) := \sqrt{x-1} - 1,$$
$$g\colon [-1,0] \to [2,3],\ g(y) := 2 + y^6.$$

(a) Zeigen Sie, daß f und g bijektive Funktionen sind, und berechnen Sie die inversen Funktionen f^{-1} und g^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die inverse Funktion von $g \circ f\colon [1,2] \to [2,3]$.

Beispiel 3 (Stetigkeit stückweise definierter Funktionen).
Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die stückweise definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} |x-1| & \text{für } x \in [-1,\infty), \\ 2\cos(x^2 - 1) & \text{für } x \in (-2,-1), \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{für } x \in (-\infty,-2], \end{cases}$$

stetig ist.

Beispiel 4 (Lösen von trigonometrischen Gleichungen).
Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$

(a) der Gleichung

$$\sqrt{3}\sin(x) = \cos(x),$$

(b) der Gleichung

$$\cos(3x) = \cos(x),$$

(c) der Gleichung

$$\cos(x) + \sin(x) = 1.$$

Beispiel 5 (Lösen von Gleichungen mit Exponentialfunktionen und Logarithmen).
Bestimmen Sie

(a) alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$a^x = b^{2x-1}$$

für gegebene, positive Parameter $a, b \in (0,\infty)$,

(b) alle Lösungen $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ der Gleichung

$$2\ln(x+2) - \ln(2x-1) = 3,$$

(c) alle Lösungen $x \in [0, \infty)$ der Gleichung

$$\ln(2\mathrm{e}^x) = 1 - 2\sqrt{x}.$$

Beispiel 6 (Parametrisierung eines Kreises).

Es bezeichne

$$S_R(M) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R\}$$

eine Kreislinie in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt in $M := (x_0, y_0)$ und Radius $R \in (0, \infty)$.
Bestimmen Sie Funktionen $\Phi_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ und $\Phi_2 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, für die der Punkt $\Phi(\varphi) := (\Phi_1(\varphi), \Phi_2(\varphi))$ für beliebiges $\varphi \in [0, 2\pi)$ auf der Kreislinie $S_R(M)$ liegt und der gerichtete Winkel von der Strecke von M nach $(x_0 + R, y_0)$ zur Strecke von M nach $\Phi(\varphi)$ gerade φ ist.