Übungsblatt 12

1. Wir betrachten das Sekantenverfahren
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$
mit beliebigen Anfangswerten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion $f \in C^3(\mathbb{R})$. Wir nehmen an, die Folge $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ konvergiere gegen die Nullstelle $\bar{x} \in \mathbb{R}$ von f und es gelte $f'(\bar{x}) \neq 0$.

   (a) Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ Punkte $\xi_k, \eta_k \in I_k$ existieren, wobei I_k das kleinste Intervall sei, das die Punkte x_{k-1}, x_k und $\bar{x}$ enthält, so daß
$$|x_{k+1} - \bar{x}| = \left| \frac{f''(\xi_k)}{2f'(\eta_k)} \right| |x_{k-1} - \bar{x}| \, |x_k - \bar{x}|$$
gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion
$$g_k(x) = \frac{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f(x_k)-f(\bar{x})}{x_k - \bar{x}}}{x_{k-1} - \bar{x}} (x - x_k)(x - \bar{x}) + \frac{f(x_k) - f(\bar{x})}{x_k - \bar{x}} (x - \bar{x}) + f(\bar{x}) - f(x).$$
Zeigen Sie, daß g_k an den Stellen x_{k-1}, x_k und $\bar{x}$ verschwindet, und schließen Sie daraus, daß g_k'' eine Nullstelle ξ_k im Intervall I_k besitzt.

   (b) Folgern Sie daraus, daß Konstanten $C \in (0,1)$, $a > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß
$$|x_k - \bar{x}| \leq aC^{\alpha^k} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
für alle $k \geq k_0$ gilt.

2. Sei $\Delta = (x_i)_{i=0}^{\ell}$ ein Gitter auf dem Intervall $[a,b]$ und $f \in C^1([a,b])$. Wir definieren die Treppenfunktion $s \in S_{0,\Delta}$ durch
$$s(x) = \sum_{i=1}^{\ell} s_i \chi_{[x_{i-1},x_i)}(x), \quad s_i = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \quad i = 1, \ldots, \ell.$$
Beweisen Sie die Fehlerabschätzung
$$\int_a^b (f(x) - s(x))^2 \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{4} \max_{i \in \{1,\ldots,\ell\}} (x_i - x_{i-1})^2 \int_a^b f'(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

3. Wir betrachten das Intervall $[-1,1]$ mit dem äquidistanten Gitter $\Delta = (-1,0,1)$. Bestimmen Sie den interpolierenden und den (bezüglich der L^2-Norm) am besten approximierenden linearen Spline $s \in S_{1,\Delta}$ zur Funktion

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4.$$

4. Wir betrachten das Intervall $[-2,2]$ mit dem Gitter $(-2,-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,2)$. Sei nun die Treppenfunktion $\beta_0 = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ gegeben.

   Zeigen Sie, daß die Faltung $\beta_0 * \beta_0$ ein linearer Spline und $\beta_0 * \beta_0 * \beta_0 * \beta_0$ ein kubischer Spline auf diesem Gitter ist, und skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.

5. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das Ihnen zu einer gegebenen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und gegebenem Gitter $\Delta = (x_i)_{i=0}^{\ell}$ auf $[a,b]$ das Interpolationspolynom p von f, definiert als das Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ vom Grad ℓ mit der Eigenschaft

   $$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{für alle} \quad i = 0,\dots,\ell,$$

   berechnet.

   Skizzieren Sie damit den Graphen des Interpolationspolynom p der Funktion

   $$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

   für $\ell = 5, 10, 20$ und äquidistantes Gitter Δ.

   Hinweis: Schreiben Sie dazu p in der Form

   $$p(x) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i p_i(x)$$

   mit Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$ und Polynomen p_i vom Grad ℓ mit der Eigenschaft

   $$p_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = 0,\dots,\ell.$$

6. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das zu gegebenem Gitter $\Delta = (x_i)_{i=0}^{\ell}$ auf einem Intervall $[a,b]$ den interpolierenden natürlichen kubischen Spline $s \in S_{3,\Delta}$ einer gegebenen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnet.

   Bestimmen Sie damit den interpolierenden natürlichen kubischen Spline der in Beispiel 5 gegebenen Funktion f in den Fällen $\ell = 5, 10, 20$ für ein äquidistantes Gitter Δ.

—