Übungsblatt 10

1. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine beliebige, invertierbare Matrix. Wir definieren die mit der Matrix $A_1 = A$ startende Iteration
$$A_{k+1} = R_k Q_k,$$
wobei $A_k = Q_k R_k$ die QR-Zerlegung[1] der Matrix A_k bezeichne, $k \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, daß dann für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$
$$A_{\ell+1} = \left(\prod_{k=1}^{\ell} Q_k\right)^* A \left(\prod_{k=1}^{\ell} Q_k\right) \quad \text{und} \quad A^\ell = \left(\prod_{k=1}^{\ell} Q_k\right)\left(\prod_{k=0}^{\ell-1} R_{\ell-k}\right) \tag{1}$$
gilt.

2. (a) Zeigen Sie, daß die QR-Zerlegung einer invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ durch
$$A = QR \quad \text{mit} \quad Q = A(L^*)^{-1}, \quad R = L^*$$
gegeben ist, wobei $A^*A = LL^*$ die Cholesky-Zerlegung der Matrix A^*A ist.
   (b) Sei $(F_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Folge von Matrizen mit $\lim_{\ell\to\infty} F_\ell = 0$. Beweisen Sie, daß dann für die QR-Zerlegung $\mathbb{1} + F_\ell = \hat{Q}_\ell \hat{R}_\ell$ von $\mathbb{1} + F_\ell$
$$\lim_{\ell\to\infty} \hat{Q}_\ell = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \lim_{\ell\to\infty} \hat{R}_\ell = \mathbb{1}$$
gilt.

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, deren Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alle betragsmäßig verschieden und größer null sind:
$$|\lambda_1| > \ldots > |\lambda_n| > 0.$$
Weiters existiere eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so daß
$$TAT^{-1} = D, \quad D = \operatorname{diag}\big((\lambda_i)_{i=1}^n\big),$$
gilt und T eine LR-Zerlegung $T = LR$ besitzt.

[1] Um die QR-Zerlegung eindeutig zu machen, wollen wir stets $R_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$, verlangen.

(a) Zeigen Sie für alle $\ell \in \mathbb{N}$, daß sich A^ℓ in der Form

$$A^\ell = (\tilde{Q}\hat{Q}_\ell)(\hat{R}_\ell \tilde{R} D^\ell R) \tag{2}$$

schreiben läßt, wobei $T^{-1} = \tilde{Q}\tilde{R}$ die QR-Zerlegung von T^{-1} bezeichne und

$$\mathbb{1} + F_\ell = \hat{Q}_\ell \hat{R}_\ell, \quad F_\ell = \tilde{R} D^\ell L D^{-\ell} \tilde{R}^{-1} - \mathbb{1}, \tag{3}$$

die QR-Zerlegung der Matrix $\mathbb{1} + F_\ell$ sei.

(b) Überprüfen Sie, daß die in (3) definierten Matrizen F_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}$, gegen null konvergieren:

$$\lim_{\ell \to \infty} F_\ell = 0.$$

(c) Folgern Sie daraus, daß die in Beispiel 1 definierte Iteration $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{k \to \infty} (A_k)_{ii} = \lambda_i$$

erfüllt.

Hinweis: Vergleichen Sie die beiden Ausdrücke (1) und (2) für A^ℓ und verwenden Sie, daß die QR-Zerlegung einer invertierbaren Matrix eindeutig ist (wenn man die Diagonalelemente der rechten, oberen Dreiecksmatrix stets positiv wählt).

4. Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix mit der Pseudoinversen $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und der Singulärwertzerlegung $A = UDV^*$. Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von $A^\dagger$, und zeigen Sie damit, daß jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Pseudoinverse besitzt.

5. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die Eigenwerte einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, die die Bedingungen von Beispiel 3 erfüllt, mit Hilfe der in Beispiel 1 definierten Iteration bestimmt.

6. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die Singulärwerte einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, wobei entweder A^*A oder AA^* die Bedingungen von Beispiel 3 erfüllen sollen, mit Hilfe der in Beispiel 1 definierten Iteration berechnet.

—