Übungsblatt 8

1. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine reguläre Matrix, so daß TAT^{-1} diagonal ist, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix und μ ein Eigenwert von $A + B$.

   Zeigen Sie, daß dann ein Eigenwert λ von A mit
   $$|\mu - \lambda| \le \mathrm{cond}(T)\|B\|_\infty$$
   existiert, wobei $\mathrm{cond}(T)$ die Kondition von T bezüglich der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet.

2. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine gegebene Matrix und
   $$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$
   ihre Gerschgorinkreise. Zeigen Sie, daß, falls für ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$ die Mengen
   $$M_1 = \bigcup_{i=1}^k K_i \quad \text{und} \quad M_2 = \bigcup_{i=k+1}^n K_i$$
   disjunkt sind, genau k Eigenwerte von A in M_1 und die restlichen $n - k$ Eigenwerte von A in M_2 liegen (dabei werden mehrfache Eigenwerte gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt).

   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion
   $$f : [0, 1] \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad f(t) = D + t(A - D), \quad D = \mathrm{diag}((a_{ii})_{i=1}^n),$$
   und verwenden Sie, daß die Eigenwerte einer Matrix stetig von ihren Einträgen abhängen.

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Resultats aus Beispiel 2, daß die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$
   diagonalisierbar ist.

4. Zeigen Sie, daß jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Wertebereich $\mathcal{W}(A) \subset \mathbb{R}$ selbstadjungiert ist.

5. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit den n Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ (jeder Eigenwert werde dabei gemäß seiner Vielfachheit gezählt). Zeigen Sie, daß
$$\lambda_{k+1} = \min_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in V^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|^2}$$
gilt, wobei $\mathcal{V}_k$ den Raum aller k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^n$ bezeichnet, $k = 0, \ldots, n-1$.

6. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das Ihnen die gemäß des Satzes von Gerschgorin erlaubten Gebiete für die Eigenwerte in der komplexen Ebene einzeichnet.

   Hinweis: Erzeugen Sie zu entsprechend gewählten Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^N$ eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ deren Eintrag A_{ij} angibt, ob an der Stelle $x_i + \mathrm{i} y_j$ ein Eigenwert sein kann oder nicht. Mit der Matlab-Funktion `image` können Sie diese Matrix dann als Bild darstellen.

—