Übungsblatt 7

1. Wir betrachten die symmetrische Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Matrix A positiv definit ist.
   (b) Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $Ax = b$ für allgemeine Wahl von b und allgemeinen Startwert $x^{(0)}$ nicht konvergiert.
   (c) Berechnen Sie zwei Schritte des Gesamtschrittverfahrens für $b = (6, 7, 6)^t$ und Startwert $x^{(0)} = 0$ und überprüfen Sie das vorherige Ergebnis.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass jede Matrix $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die $A - G^t A\, G$ positiv definit ist, $\rho(G) < 1$ erfüllt.

3. Das SOR-Verfahren (*Successive Over-Relaxation*) ist ein iteratives Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.
   Dabei wählt man sich ein $\omega \in (0, 2)$ sowie einen Startwert $x^{(0)}$ und berechnet $x_i^{(k+1)}$ iterativ nach der Vorschrift
$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}\cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}\cdot x_j^{(k)}\right).$$
   Zeigen Sie, dass sich das SOR-Verfahren in das allgemeine Schema einer Fixpunktiteration einordnen lässt. Es sind also eine Matrix T_ω und ein Vektor t_ω zu finden, sodass
$$x^{(k+1)} = T_\omega x^{(k)} + t_\omega$$
   gilt und der Fixpunkt der Abbildung $x \mapsto T_\omega x + t_\omega$ durch die Lösung der Gleichung $Ax = b$ gegeben ist. Was passiert im Spezialfall $\omega = 1$?

4. Sei $Ax = b$ ein Gleichungssystem mit $A = M - N$, wobei M invertierbar sei. Gegeben $x^{(0)}$, bestimmt man $x^{(k+1)}, k \geq 1$, durch Auflösen der Vektorgleichung
$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b. \tag{1}$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) in der Form
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}r^{(k)}$$
   geschrieben werden kann und bestimmen Sie $r^{(k)}$.

(b) Wir führen nun einen (Relaxations-)Parameter α ein und definieren das Richardson Verfahren durch

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha M^{-1} r^{(k)}.$$

Wir nehmen an, dass die Matrix $M^{-1}A$ positive Eigenwerte $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n > 0$ hat. Zeigen Sie, dass dann das Richardson Verfahren konvergiert, wenn $0 < \alpha < 2/\lambda_1$ erfüllt ist. Zeigen Sie zusätzlich, dass für

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

das Verfahren am schnellsten konvergiert.
Hinweis: Je kleiner der Spektralradius der Verfahrensmatrix ist, desto schneller konvergiert das Iterationsverfahren.

5. Programmieren Sie in Matlab das SOR-Verfahren aus Übung 3 für ein Gleichungssystem $Ax = b$.

6. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ eines Gleichungssystems $Ax = b$ für gegebene symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mithilfe des Verfahrens der konjugierten Gradienten annähert.

—