Übungsblatt 6

1. Wir definieren die Pseudoinverse $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ durch die Eigenschaften
$$AA^\dagger A = A, \qquad (AA^\dagger)^* = AA^\dagger,$$
$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \qquad (A^\dagger A)^* = A^\dagger A.$$
   (a) Zeigen Sie, daß die Pseudoinverse, falls sie existiert, dadurch eindeutig bestimmt ist.

   Bemerkung: Es läßt sich zeigen, daß jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine Pseudoinverse besitzt.

   (b) Sei nun $m \geq n$ und die Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ habe vollen Rang. Zeigen Sie, daß sich die Pseudoinverse $A^\dagger$ von A dann in der Form
$$A^\dagger = R^\dagger Q^*$$
   schreiben läßt, wobei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A bezeichne und $R^\dagger$ durch
$$R^\dagger = \begin{pmatrix}\tilde{R}^{-1} & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times m}, \quad R = \begin{pmatrix}\tilde{R} \\ 0\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad \tilde{R} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$
   gegeben ist.

   (c) Welche Formel für die Pseudoinverse einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit vollem Rang bekommt man mittels einer QR-Zerlegung im Fall $m \leq n$?

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt diagonaldominante Matrix. Zeigen Sie, daß dann Einzel- und Gesamtschrittverfahren für die Gleichung
$$Ax = b$$
   für beliebigen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gegen eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ konvergieren, und schätzen Sie den Fehler nach k Iterationsschritten ab.

3. Zur Konvergenzverbesserung von Einzel- und Gesamtschrittverfahren zur Lösung einer Gleichung
$$Ax = b$$
   für gegebene strikt diagonaldominante Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ kann man die Verfahren stattdessen auf die Gleichung
$$PAx = Pb$$

für eine geeignet gewählte, invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ anwenden. Eine mögliche Wahl für P ist zum Beispiel:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\ell_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\ell_{n-1} & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -\ell_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Überprüfen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0,1),$$

daß die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens durch dieses sogenannte Vorkonditionieren mit der oben angegebenen Matrix P tatsächlich verbessert wird.

4. (a) Sei $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{C}^n$ und $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to [0,\infty)$ die dadurch auf dem Raum der komplexen $n \times n$-Matrizen induzierte Operatornorm. Zeigen Sie, daß der Spektralradius $\rho(A)$ jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch den Grenzwert

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

bestimmt werden kann, und folgern Sie, daß insbesondere stets $\rho(A) \leq \|A\|$ gilt.

(b) Zeigen Sie, daß zu jeder diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Norm $\|\cdot\|_A : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ auf $\mathbb{C}^n$ existiert, so daß für die dadurch induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_A : \mathbb{C}^{n\times n} \to [0,\infty)$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$

$$\rho(A) = \|A\|_A$$

gilt.

(c) Beweisen Sie, daß sich zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Norm $\|\cdot\|_{A,\varepsilon} : \mathbb{C}^n \to [0,\infty)$ auf $\mathbb{C}^n$ finden läßt, so daß die dadurch induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_{A,\varepsilon} : \mathbb{C}^{n\times n} \to [0,\infty)$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ die Ungleichung

$$\rho(A) < \|A\|_{A,\varepsilon} + \varepsilon$$

erfüllt.

5. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ eines Gleichungssystems $Ax = b$ für gegebene strikt diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe des Gesamtschrittverfahrens annähert.

6. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ eines Gleichungssystems $Ax = b$ für gegebene strikt diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe des Einzelschrittverfahrens annähert.

—