Übungsblatt 5

1. Sei $P = I - 2vv^t \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Hausholder-Transformation mit $||v||_2 = 1$. Seien $x \in \mathbb{R}^2$, u die Projektion von x in Richtung v und $w = x - u$. Zeigen Sie, dass $Px = -u + w$. Was ist die geometrische Bedeutung?

2. Sei $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die Hausholder-Transformation,
$$P = I - \frac{2}{v^t v} vv^t, \;\; v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}\,.$$
Zeigen Sie, dass auch die Matrix
$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$
eine Hausholder-Transformation ist.
Hinweis: Wählen Sie $\tilde{v} = (0, v^t)^t$ für die Matrix $\tilde{P}$.

3. Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\;.$$

4. Beweisen Sie die Fehler Abschätzungen (Monotonie, a-priori Schanke und a-posteriori Schranke) aus dem Satz 3.1 der Vorlesung.
Hinweis: Für die zweite Ungleichung bestimmen Sie $|x^{(k+n)} - x^{(k)}|$ für $n \to \infty$. Für die dritte Ungleichung wählen Sie $y^{(0)} := x^{(k-1)}$ und verwenden Sie die a-priori Schranke.

5. Sei $Ax = b$ das Gleichungssystem mit
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & a_{33} & 0 & a_{3n} \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die für die gegebene spezielle Matrix A und Vektor b das Gleichungssystem mithilfe der Substitutionsmethode löst.

Vergleichen Sie für große n die Laufzeit dieser Funktion mit der Lösung mittels LR-Zerlegung.

6. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ berechnet, wobei $m \geq n$. Verwenden Sie dazu den Algorithmus aus der Vorlesung.