Übungsblatt 4

1. Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Bandmatrix mit Bandbreite $k < n$ (das heißt, sei $A_{ij} = 0$, falls $|i-j| \geq k$ ist). Zeigen Sie, daß dann auch für die Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$ gilt, daß L eine Bandmatrix mit Bandbreite k ist.

   (b) Gilt auch für die LR-Zerlegung $PA = LR$ einer regulären Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, daß L und R wieder Bandmatrizen mit der gleichen Bandbreite wie A sind?

   (c) Ist die Inverse Matrix einer regulären Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix mit der gleichen Bandbreite wie A?

3. Zu jeder Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir die Permutationsmatrix $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$(P_\sigma v)_i = v_{\sigma^{-1}(i)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

   für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Bestimmen Sie die Einträge der Matrix P_σ, und berechnen Sie für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowohl $P_\sigma A$ als auch AP_σ.

   (b) Zeigen Sie, daß

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau} \quad \text{und} \quad P_\sigma^{-1} = P_\sigma^{\mathrm{T}} = P_{\sigma^{-1}}$$

   für alle Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ gilt.

   (c) Berechnen Sie die Determinante und die Spur von P_σ.

4. Sei $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ eine reguläre, symmetrische, $A_{12} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ eine beliebige und $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22} \end{pmatrix}$$

   genau dann positiv definit ist, wenn A_{11} und das Schur-Komplement $S = A_{22} - A_{12}^{\mathrm{T}} A_{11}^{-1} A_{12}$ positiv definit sind.

5. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit dem Gauß-Algorithmus mit Totalpivotsuche bestimmt.

6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie, daß sich A eindeutig in der Form $A = LDL^{\mathrm{T}}$ schreiben läßt, wobei D eine Diagonalmatrix und L eine untere Dreiecksmatrix mit $L_{ii} = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei.

   Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das Ihnen zu gegebener symmetrisch, positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, solch eine Zerlegung $A = LDL^{\mathrm{T}}$ liefert.

   Hinweis: Adaptieren Sie den Algorithmus zur Konstruktion der Cholesky-Zerlegung.

—