Übungsblatt 3

1. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *strikt diagonaldominant*, wenn
$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$
für alle $1 \leq i \leq n$. Wir betrachten die LR-Zerlegung $A = LR$, wobei das Pivotelement $a_{ii}^{(i)}$ nie Null wird. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten r_{ij} der Matrix R die Ungleichung
$$|r_{ij}| \leq 2 \max_{i,j} |a_{ij}|$$
für alle $1 \leq i, j \leq n$ erfüllen.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare und symmetrische Matrix mit LR-Zerlegung $A = LR$. Zeigen Sie, dass $R = DL^t$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, für die $d_{ii} = r_{ii}$, $i = 1, ..., n$ gilt.

3. Sei
$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeigen Sie mithilfe der LR-Zerlegung, dass die Matrix A positiv definit ist.
   (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution mit $b = (8, 10, -2)^t$.

4. Lösen Sie händisch das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
Verwenden Sie dabei den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche.

5. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das überprüft, ob die übergebene Matrix A invertierbar und symmetrisch ist und dann die Zerlegung von Beispiel 2 durchführt.

6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Tridiagonalmatrix der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix},$$

mit $a_i, b_i, c_i \neq 0, |a_1| > |b_1|, |a_n| > |c_n|$ und $|a_i| \geq |b_i| + |c_i|$ für $2 \leq i \leq n-1$. Dann hat die Matrix A eine eindeutige LR-Zerlegung $A = LR$, wobei L und R Bidiagonalmatrizen sind, die die folgende spezielle Form haben

$$L = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_2 & d_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & d_n \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & e_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & e_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die LR-Zerlegung der gegebenen Tridiagonalmatrix A ausgibt, indem sie die Komponenten d_i und e_i bestimmt.

(b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die für gegebene Tridiagonalmatrix A und Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $LRx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution löst.