Übungsblatt 2

1. Berechnen Sie die Kondition der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$
bezüglich der Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F$. Für $b \in \mathbb{R}^2$ seien $x \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Systems $Ax = b$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des gestörten Systems $A\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei $\tilde{b} = b + \Delta b$ eine gestörte rechte Seite ist. Wie kann man mit Hilfe der Kondition von A den relativen Fehler
$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2}$$
abschätzen ohne dabei das System explizit zu lösen. Vergleichen Sie diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Wert des relativen Fehlers für $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Sei $A = \lambda U \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{cond}_2(A) = 1$. Dabei sei cond_2 die Konditionszahl bezüglich der Spektralnorm.

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär mit positiven Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$.

   (a) Beweisen Sie die Gleichung
   $$\operatorname{cond}_2(A^t A) = (\operatorname{cond}_2(A))^2.$$

   (b) Zeigen Sie, dass wenn A symmetrisch ist, dann
   $$\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

4. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär Matrix mit $a_{11} \neq 0$. Dann existiert eine LR-Zerlegung der Matrix $A = LR$, wobei L eine linke untere Dreiecksmatrix ist, deren Diagonaleinträge alle gleich 1 sind, und R eine rechte obere Dreiecksmatrix ist.

   (a) Beweisen Sie, dass die LR-Zerlegung eindeutig ist. Das heißt, es gibt keine von L, R verschiedene Matrizen $\tilde{L}, \tilde{R}$, so dass $A = \tilde{L}\tilde{R}$ gilt. Ist die Zerlegung immer noch eindeutig, wenn man die Forderung an die Diagonale von L fallen lässt?

(b) Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} r_{ii},$$

wobei $R = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(c) Berechnen Sie die Matrizen L, R für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{2000 \times 2000}$ und $b \in \mathbb{R}^{2000}$. Wir setzen $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 5, & i = j, \\ -2, & i = j + 2, \\ 3, & i \leq j - 3, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und setzen $b = \big(b_i\big)_{i=1}^{2000}$ mit $b_i = 1$.

(a) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das mit den Matlab-Befehlen `diag` und `triu` die Matrix A initialisiert und lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Befehl `x = A\b`.

(b) Schreiben Sie ein anderes Matlab-Programm, das mit einer Matlab-Schleife `for` und einem `if`-Block die Matrix A initialisiert und lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Befehl `x = inv(A)*b`.

Überprüfen Sie, dass beide Ergebnisse gleich sind. Was fällt Ihnen an der Laufzeit auf? Wie groß ist die Kondition von A?

Hinweis: Sie können mit `cond` die Kondition der Matrix bestimmen.

6. Wir definieren den Goldenen Schnitt ϕ als die positive Lösung der quadratischen Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Der Goldene Schnitt kann mit Hilfe der Iterationsverfahren

$$\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n}$$

oder

$$\phi_{n+1} = \frac{\phi_n^2 + 1}{2\phi_n - 1}$$

durch $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$ approximiert werden. Setzen Sie $\phi_0 = 1$ und schreiben Sie ein Matlab-Programm, das mit beiden Verfahren die Zahl ϕ approximiert. Diese Schritte werden wiederholt, bis das Abbruchkriterium $\|\phi - \phi_n\|_2 \leq 10^{-4}$ erfüllt ist. Welches der beiden Verfahren konvergiert schneller?