Übungsblatt 1

1. (a) Bestimmen Sie die absoluten und relativen Konditionszahlen der Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \arctan(x - y) \quad \text{und}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \sin(x) - \cos(y).$$

Wann sind diese Funktionen schlecht konditioniert?

(b) Existiert eine Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, deren absolute wie auch relative Konditionszahl kleiner als eins ist?

2. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion, $n \in \mathbb{N}$, und sei $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Implementierung eines Algorithmus, mit dem wir die Funktion F berechnen wollen. Wir nehmen an, daß sich G mit Hilfe einer Funktion $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in der Form

$$G(x) = F(x + \varepsilon(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

schreiben läßt.

Wir nennen den Algorithmus G nun rückwärts stabil, falls wir die Funktion ε so wählen können, daß eine (genügend kleine) Konstante $C > 0$ existiert, so daß für die relativen Fehler die Abschätzung

$$\left\| \frac{\varepsilon(x)}{x} \right\|_2 \le C \left| \frac{G(x) - F(x)}{F(x)} \right| \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Zeigen Sie, daß

$$G_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad G_1(a, b) = (a + b)(1 + \delta_1(a, b)) \quad \text{und}$$
$$G_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad G_2(a, b) = ab(1 + \delta_2(a, b))$$

für beliebige, den Rundungsfehler beschreibende Funktionen $\delta_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $|\delta_i(x)| \le \delta_0 < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, rückwärts stabile Implementierungen zur Berechnung der Addition $F_1(a, b) = a + b$ beziehungsweise der Multiplikation $F_2(a, b) = ab$ sind.

3. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \bar{\mathbb{R}}$ und $x_0 \in D$. Die Landau'schen Symbole $O(f)$ und $o(f)$ von f bezüglich des Grenzwerts $x \to x_0$ sind definiert durch

$$O(f) = \left\{ g : D \to \mathbb{R} \mid \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| < \infty \right\} \quad \text{und}$$
$$o(f) = \left\{ g : D \to \mathbb{R} \mid \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = 0 \right\}.$$

   (a) Sei f differenzierbar und erfülle $f(x_0) = 0$. Gilt dann $f \in o(x - x_0)$?

   (b) Seien $g \in O(f)$ und $h \in O(g)$ gegeben. Gilt dann $h \in O(f)$?

   (c) Ist $O(f)$ ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen von D nach $\mathbb{R}$?

4. Beweisen Sie, daß die durch

$$\|A\|_{\infty,1} = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

definierte Norm auf dem Raum $\mathbb{R}^{m \times n}$ der reellen $m \times n$-Matrizen die durch die Maximumsnormen

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \ x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{und} \quad \|y\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} |y_i|, \ y \in \mathbb{R}^m,$$

auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ induzierte Norm ist, das heißt, daß

$$\|A\|_{\infty,1} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad \text{für alle} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

gilt.

5. Die Exponentialfunktion an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ kann man bekanntlich einerseits als Grenzwert:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

und andererseits als Reihe:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

darstellen.

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das zu gegebenem $x \in \mathbb{R}$ die Folgenglieder $(1 + \frac{x}{n})^n$ und die Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für $n \in \mathbb{N}$ berechnet. Welche eignen sich besser zur Approximation von e^x?

6. Sei das Polynom

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

gegeben. Um P an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ auszuwerten, kann man (neben direktem Einsetzen in die Definition von P) das Horner-Schema

$$P_k(x) = c_{n-k} + xP_{k-1}(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

mit dem Anfangswert $P_0(x) = c_n$ verwenden. Es gilt dann $P = P_n$.

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die aus den Koeffizienten $(c_k)_{k=0}^n$ das Polynom P an einer gegebenen Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit dem Horner-Schema berechnet und vergleichen Sie das Ergebnis für das Polynom

$$\begin{aligned} P(x) = 1\,953\,125x^9 - 28\,125\,000x^8 + 180\,000\,000x^7 - 672\,000\,000x^6 \\ + 1\,612\,800\,000x^5 - 2\,580\,480\,000x^4 + 2\,752\,512\,000x^3 \\ - 1\,887\,436\,800x^2 + 754\,974\,720x - 134\,217\,728 \end{aligned}$$

an der Stelle $x = \frac{8}{5}$ mit der direkten Auswertung des Polynoms.

—