Zweite Prüfung zur Vorlesung „Numerische Mathematik“

- *Erlaubte Hilfsmittel:* Schriftliche Unterlagen nach Belieben.
- *Prüfungsdauer:* 120 Minuten.
- Bitte schreiben Sie dokumentenecht und versehen jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Alle Antworten sind zu begründen.
- Die Beispiele werden alle gleich gewichtet.

---

1. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ und das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = b + \Delta b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \Delta b = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cond}_{1,\infty}(A) = \mathrm{cond}_{\infty,1}(A)$, wobei A die gegebene Matrix ist.

   (b) Schätzen Sie über die Konditionszahl von A alle möglichen Werte für α, so dass

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 0.08$$

   gilt.

(a) Wir bestimmen

$$|A| = 1, \ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann

$$\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = (1 + |\alpha|)(1 + |-\alpha|) = (1 + |\alpha|)^2$$

und auch

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (1 + |\alpha|)(1 + |-\alpha|) = (1 + |\alpha|)^2$$

(b) *Wir wissen, dass*

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

Wir lösen die Ungleichung

$$\mathrm{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 0.08 \Rightarrow (1 + |\alpha|)^2 \leq 4$$

Dann bekommen wir $-3 \leq |\alpha| \leq 1 \Rightarrow \alpha \in [-1, 1]$.

2. Wir approximieren ein Integral im Intervall $[0,1]$ mit der Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Q[f] := \alpha f(0) + \beta f'(0) + \gamma f(1).$$

Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $Q[f]$ exakt ist für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2.

Wegen der Linearität des Integrals testen wir die Exaktheit der Quadraturformel für jedes Monom x^n, $n = 0, 1, 2$. Die Quadraturformel hat genau Exaktheitsgrad n, wenn sie für Polynome mit Grad kleiner oder gleich n exakt ist.

Somit haben wir die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1dx = Q[1] &\Rightarrow 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\
\int_0^1 xdx = Q[x] &\Rightarrow \frac{1}{2} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1 \\
\int_0^1 x^2dx = Q[x^2] &\Rightarrow \frac{1}{3} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 1/2 \\ \gamma = 1/3 \end{cases}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$.

3. Wir betrachten das durch das Runge-Kutta Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \\ \hline & 1-\beta & \beta \end{array}, \quad \beta \in [\tfrac{1}{2}, 1], \quad \gamma \in [\tfrac{1}{2}, 1],$$

definierte zweistufige Runge-Kutta-Verfahren Φ_h zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= -y(t), \quad t > 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

mit der Schrittweite $h > 0$.

Bestimmen Sie diejenigen Schrittweiten $h > 0$, für welche die dadurch definierte Folge $(y_i^{(h)})_{i=0}^{\infty}$,

$$y_i^{(h)} = \Phi_h(y_{i-1}^{(h)}), \quad y_0^{(h)} = 1, \quad i \in \mathbb{N},$$

gegen null konvergiert.

Setzen wir das angegebene Tableau in die Formel des Runge-Kutta-Verfahrens,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \sum_{j=1}^{2} b_j f(t_i + c_j h, \eta_{i,j}), \\ \eta_{i,j} &= y_i + h \sum_{k=1}^{2} a_{jk} f(t_i + c_j h, \eta_{i,k}), \end{aligned}$$

ein, so bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_{i,1} &= y_i, \\ \eta_{i,2} &= (1 - h\gamma) y_i, \\ y_{i+1} &= (1 - h(1-\beta) - h\beta(1 - h\gamma)) y_i = (1 - h + h^2\beta\gamma) y_i. \end{aligned}$$ **1**

Die Folge konvergiert somit genau dann gegen null, wenn $|1 - h + h^2\beta\gamma| < 1$ *ist. Dies ist äquivalent zu*

$$h^2\beta\gamma - h < 0 \quad \textit{und} \quad h^2\beta\gamma - h + 2 > 0.$$

Die erste Bedingung liefert

$$h \in (0, \tfrac{1}{\beta\gamma}),$$

und die zweite Bedingung ist automatisch erfüllt, da wegen $\beta\gamma \geq \frac{1}{4}$

$$h^2\beta\gamma - h + 2 = \beta\gamma \left(h - \frac{1}{2\beta\gamma} \right)^2 + 2 - \frac{1}{4\beta\gamma} \geq 1$$

ist.

Somit konvergiert die Folge genau für $h \in (0, \frac{1}{\beta\gamma})$ *gegen null.*

4. Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $s:[0,1]\to\mathbb{R}$ ein interpolierender kubischer Spline von f mit der Eigenschaft $s'(0)=f'(0)$ und $s'(1)=f'(1)$.

   (a) Zeigen Sie, daß
   $$\int_0^1 (f''(x)-s''(x))s''(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
   ist.

   (b) Folgern Sie daraus die Abschätzung
   $$\int_0^1 (s''(x))^2\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Bezeichnen wir mit $(x_i)_{i=0}^{\ell}$ die Punkte des Gitters auf dem s definiert ist und setzen $g=f-s$, so bekommen wir mit partiellem Integrieren:
   $$\begin{aligned}\int_0^1 g''(x)s''(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{\ell}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g''(x)s''(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=1}^{\ell}\left[g'(x_i)s''(x_i)-g'(x_{i-1})s''(x_{i-1})-\int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x)s'''(x)\,\mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$
   Nun bleiben von der Summation der erstem beiden Terme nur die Randterme $g'(1)s''(1)-g'(0)s''(0)$ übrig, und weil $s'''(x)=(s''')_i$ auf jedem Teilintervall (x_{i-1},x_i) konstant ist, können wir die Integrale direkt auswerten. Wir erhalten somit
   $$\int_0^1 g''(x)s''(x)\,\mathrm{d}x = g'(1)s''(1)-g'(0)s''(0)-\sum_{i=1}^{\ell}(s''')_i(g(x_i)-g(x_{i-1}))=0,$$
   da nach Annahme $g'(0)=g'(1)=0$ und $g(x_i)=0$ für alle $i=0,\dots,\ell$ gilt.

   (b) Anwenden von Cauchy-Schwarz auf die Gleichheit aus Teil (a) liefert direkt
   $$\int_0^1 (s''(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f''(x)s''(x)\,\mathrm{d}x \le \left[\int_0^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x\int_0^1 (s''(x))^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$
   Quadrieren der Ungleichung und Dividieren durch $\int_0^1 (s''(x))^2\,\mathrm{d}x$ liefert uns nun direkt die Behauptung.

—