Prüfung zur Vorlesung „Numerische Mathematik“

- *Erlaubte Hilfsmittel:* Schriftliche Unterlagen nach Belieben.
- *Prüfungsdauer:* 120 Minuten.
- Bitte schreiben Sie dokumentenecht und versehen jedes Blatt mit Ihrem Namen.
- Alle Antworten sind zu begründen.
- Die Beispiele werden alle gleich gewichtet.

---

1. (a) Sei $\{q_1, ..., q_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und I die $n \times n$ Identitätsmatrix. Zeigen Sie, daß die Matrix

$$Q = I - \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t$$

eine orthogonale Projektionsmatrix ist, d.h. $Q^t = Q$ und $Q^2 = Q$.

Lösung: Die Matrix Q ist orthogonal, da

$$Q^t = \left(I - \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t\right)^t = I - \sum_{i=1}^{n-1} \left(q_i q_i^t\right)^t = I - \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t = Q$$

gilt.
Außerdem ist Q eine Projektionsmatrix, da

$$\begin{aligned} Q^2 = \left(I - \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t\right)^2 &= I - 2\sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t + \left(\sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t\right)^2 \\ &= I - 2\sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t + \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t = Q \end{aligned}$$

gilt, wobei wir die Identität

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} q_i q_i^t q_j q_j^t \underbrace{=}_{q_i^t q_j = \delta_{ij}} \sum_{i=j=1}^{n-1} q_i \underbrace{q_i^t q_i}_{=1} q_i^t = \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_i^t$$

benützt haben.

(b) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Im ersten Schritt bekommen wir für den Projektionsvektor v_1 den Ausdruck

$$v_1 = \frac{a_1}{||a_1||_2} + e_1 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir dann die erste Projektionsmatrix

$$P_1 = I - 2\frac{v_1 v_1^t}{v_1^t v_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

die, wie gewünscht,

$$P_1 A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

erfüllt.

Im zweiten Schritt betrachten wir nun die Teilmatrix

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

für die wir den Projektionsvektor

$$v_2 = \frac{(a_2)_1}{||(a_2)_1||_2} + e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und damit als Projektionsmatrix die Permutationsmatrix

$$Q_2 = I - 2\frac{v_2 v_2^t}{v_2^t v_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

erhalten. Angewendet auf die einmal projezierte Ausgangsmatrix, liefert uns das

$$P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} P_1 A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Im letzten Schritt bleibt uns noch die zu einem Vektor entartete Matrix

$$a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zu betrachten. Wir erhalten den Projektionsvektor

$$v_3 = \frac{a_3}{||a_3||_2} + e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

woraus sich wieder direkt die Projektionsmatrix

$$Q_3 = I - 2\frac{v_3 v_3^t}{v_3^t v_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

bestimmen läßt.

Wenden wir die drei Projektionsmatrizen nun nacheinander auf A an, so bekommen wir die gesuchte obere Dreicksmatrix R:

$$R = P_3 P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

und schließlich Q durch Vergleichen mit der verlangten Identität $R = Q^t A$:

$$Q = P_1 P_2 P_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Schätzen Sie die Kondition der Matrix A bezüglich der Spektralnorm mit Hilfe der Gerschgorinkreise möglichst gut ab.

Lösung: *Aus der Defintion der Kondition und der Spektralnorm erhalten wir den Ausdruck*

$$\begin{aligned}\operatorname{cond}_2(A) &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}\sqrt{\rho((A^{-1})^tA^{-1})} \\ &= \sqrt{\rho(A^tA)\rho((AA^t)^{-1})} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_4}}\end{aligned}$$

für die Kondition der Matrix A, wobei $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \mu_4 > 0$ die Eigenwerte von A^tA sind.

Explizit finden wir für A^tA die Matrix

$$A^tA = \begin{bmatrix} 10 & 1.5 & 0 & -6.5 \\ 1.5 & 25.25 & 0 & -2.25 \\ 0 & 0 & 100 & 10 \\ -6.5 & -2.25 & 10 & 65.5 \end{bmatrix}.$$

Nun sind die Gerschgorinkreise alle disjunkt und wir finden für die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} |\mu_1 - 100| \leq 10 \quad &\Rightarrow \quad 90 \leq \mu_1 \leq 110, \\ |\mu_2 - 65.5| \leq 18.75 &\Rightarrow 46.75 \leq \mu_2 \leq 84.25, \\ |\mu_3 - 25.25| \leq 3.75 \quad &\Rightarrow \quad 21.5 \leq \mu_3 \leq 29, \\ |\mu_4 - 10| \leq 8 \quad &\Rightarrow \quad 2 \leq \mu_4 \leq 18. \end{aligned}$$

Somit bekommen wir

$$\operatorname{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_4}} \leq \sqrt{55}.$$

3. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \arctan(x) + xy + y^2.$$

Nähern Sie mit zwei Iterationsschritten des Newton-Verfahrens, ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (3, 0)$, den kritischen Punkt von f an.

Lösung: *Für die Ableitung der Funktion f bekommen wir*

$$F(x,y) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} + y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Und die Ableitung der Funktion F bestimmt sich zu

$$\mathrm{d}F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Inverse von $\mathrm{d}F(x,y)$ gegeben durch

$$\mathrm{d}F(x,y)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{4x}{(1+x^2)^2}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & \frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Das Newton-Verfahren lautet also

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{1+\frac{4x}{(1+x^2)^2}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & \frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2}+y \\ x+2y \end{pmatrix}.$$

Mit $(x_0, y_0) = (3,0)$ bekommen wir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+\frac{12}{100}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & \frac{6}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{25}{28} \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der zweite Schritt ergibt dann

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+\frac{32}{25}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & \frac{16}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{20} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} - \frac{25}{57} \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ \frac{11}{20} \end{pmatrix} = (1 - \tfrac{1}{57}) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tfrac{1}{4}x^5 - x^3 - x.$$

Wir betrachten für $a \in \mathbb{R}$ die Fixpunktgleichung

$$\Phi_a(x) = x$$

für die Funktion

$$\Phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi_a(x) = x + af(x).$$

(a) Bestimmen Sie das größte Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so daß für jeden Wert $a \in I$ eine offene Umgebung U von 0 existiert, so daß die Funktion Φ_a, eingeschränkt auf die Menge U, eine Kontraktion ist.

Lösung: Gilt für die stetig differenzierbare Abbildung Φ_a die Abschätzung

$$|1 - a| = |\Phi_a'(0)| < 1,$$

also $a \in (0,2)$, so existiert ein $q \in (0,1)$ und eine Umgebung U um 0, so daß für alle $x \in U$ die Ungleichung $|\Phi_a'(x)| \leq q$ erfüllt ist, weshalb also nach dem Mittelwertsatz für alle $x, y \in U$ ein $\xi \in U$ mit

$$|\Phi_a(x) - \Phi_a(y)| = |\Phi_a'(\xi)||x-y| \leq q|x-y|$$

existiert.

Umgekehrt existiert für jedes $a \notin (0,2)$ zu jedem Wert $q \in [0,1)$ und beliebigen $\varepsilon > 0$ ein Wert $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit

$$q|x-0| < \left(|\Phi_a'(0)| - \frac{1-q}{2} \right) |x-0| < |\Phi_a(x) - \Phi_a(0)|,$$

weshalb Φ_a keine Kontraktion sein kann.

(b) Zeigen Sie, daß für alle $a \in (0,1)$ die durch die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi_a(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

definierte Folge $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ für beliebige Startwerte $x_0 \in [-2,2]$ gegen die Nullstelle $x = 0$ der Funktion f konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, daß für alle $a \in (0,1)$ der Fixpunkt $x = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $|\Phi_a(x)| = |x|$ im Intervall $[-2,2]$ ist.

Lösung: Die Nullstellen von

$$x - \Phi_a(x) = -af(x) = -\frac{1}{4}ax(x^4 - 4x^2 - 4)$$

sind neben null nur $x^2 = 2(1 \pm \sqrt{2})$, so daß keine weitere Nullstelle im Intervall $[-2,2]$ liegt.

Andererseits sind die Nullstellen der Funktion

$$\Phi_a(x) + x = \frac{1}{4}ax(x^4 - 4x^2 + 4(\tfrac{2}{a} - 1)),$$

für $a \in (0,1)$ neben $x = 0$ bei

$$x^2 = 2 \pm 2\sqrt{2 - \tfrac{2}{a}} \notin \mathbb{R},$$

so daß im Intervall $[-2,2]$ ebenfalls nur $x = 0$ eine Nullstelle ist.

Wegen $|\Phi_a'(0)| < 1$ gilt somit für alle $x \neq 0$:

$$|\Phi_a(x)| < |x|,$$

weshalb die Folge $(|x_k|)_{k=0}^{\infty}$ außerhalb von Null streng monoton fallend ist und somit gegen null konvergiert.

—