Name:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

---

4. Klausur Numerische Mathematik

28. Februar 2012

1. Verwenden Sie das CG-Verfahren mit Startwert $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$, um das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
zu lösen. Geben Sie dabei die Ergebnisse sämtlicher Rechenschritte aus, und führen Sie die Iteration bis zur Konvergenz durch.

2. Finden Sie das Minimum $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ der reellwertigen Funktion
$$f(x, y) = -\ln(xy) + x(y-1)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{y}{2} \ .$$
Lösen Sie dazu die Optimalitätsbedingung
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
indem Sie **zwei Schritte des Newtonverfahrens** mit Startwert $(x_0, y_0) = (1, 1)$ durchführen.

3. Die Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2$$
hat eine einfache Nullstelle bei $\hat{x} = 2$. Geben Sie ein möglichst großes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, sodass für alle $a \in I$ die zu
$$\Phi_a(x) = x \quad \text{mit} \quad \Phi_a(x) := x + af(x)$$
gehörende Fixpunktiteration $x_{n+1} := \Phi_a(x_n)$ lokal gegen $\hat{x}$ konvergiert.

4. Wir approximieren ein Integral im Intervall $[0, 1]$ anhand der Quadraturformel
$$\int_0^1 f(t)dt \approx Q[f] := \alpha f(0) + \beta f'(\gamma) \ ,$$
wobei $\gamma \in \ ]0, 1[$. Bestimmen Sie α, β, γ so, dass $Q[f]$ exakt ist für Polynome vom Grad 2. Verwenden Sie die Quadraturformel $Q[f]$ für das Intervall $[0, 1]$, um eine verallgemeinerte Quadraturformel $\tilde{Q}[f]$ für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ herzuleiten.