Name:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

2. Klausur Numerische Mathematik

18. Oktober 2011

1. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}}_{=:\mathrm{A}} x = \underbrace{\begin{pmatrix} -10 \\ 18 \\ 52 \\ 63 \end{pmatrix}}_{=:b}.$$

   Führen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix $A =: A^{(1)}$ mit Spaltenpivotsuche durch. Im k-ten Teilschritt mit Matrix $A^{(k)}$ soll das betragsgrößte Element unterhalb der Diagonale der betreffenden Spalte als Pivot verwendet werden, d.h. $\max_{i \geq k} |a_{ik}^{(k)}|$. Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem mittels Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution. Geben Sie in jedem Teilschritt alle verwendeten Matrizen an. (Hinweis: $x = (1, 2, 3, 4)^T$).

2. Sei $\alpha \in \,]a, b[$ eine doppelte Nullstelle von

$$f(x) = (x - \alpha)^2 h(x) \quad \text{mit} \quad h(\alpha) \neq 0 \quad \text{und} \quad h, f \in C^3([a, b]).$$

   Mit welcher Ordnung konvergiert das Newtonverfahren zur Bestimmung der Nullstelle von $f(x)$?

3. Wir approximieren ein Integral im Intervall $[0, 1]$ anhand der folgenden Quadraturformel

$$\int_0^1 f(t)dt \approx Q[f] := \alpha f(0) + \beta f'(\gamma) \ ,$$

   wobei $\gamma \in \,]0, 1[$. Bestimmen Sie α, β, γ sodass $Q[f]$ exakt ist für Polynome vom Grad 2. Verallgemeinern Sie die Quadraturformel $Q[f]$ für ein beliebiges Intervall $[a, b]$.

4. Sei $T > 0$. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = -\frac{1}{2\tau} y(t), \qquad t \in [0, T]$$

   mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ und $\tau > 0$.

   - Wie lautet die analytische Lösung dieser Differentialgleichung?

- Sei $t_0 := 0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N := T$ für eine positive ganze Zahl N und $\Delta t := t_{i+1} - t_i = const.$ für $0 \leq i \leq N-1$. Geben Sie die Iteration des expliziten Eulerverfahren für die gegebene Differentialgleichung an.
- Welche Bedingung an den Quotienten von Δt und τ muß gelten, um Stabilität des Verfahrens zu gewährleisten.