Name:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

---

3. Klausur Numerische Mathematik

14. Dezember 2010

1. Bestimmen Sie eine Näherung der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1\,, \\ y(z+1) &= 1\,, \\ z(x+y+4) &= 1\,, \end{aligned}$$

indem Sie einen Schritt des Newtonverfahrens mit Startwert $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 0)$ durchführen.

2. Betrachten Sie zur Berechnung einer Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 1\ .$$

die Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2} f(x^{(k)})\ .$$

Zeigen Sie, dass diese Iteration mit Startwert $x^{(0)} = 1$ tatsächlich gegen eine Nullstelle $\hat{x}$ von f konvergiert. Führen Sie weiters einen Schritt der Fixpunktiteration durch, und verwenden Sie das Ergebnis, um abzuschätzen, nach wievielen Schritten der Abstand zwischen $x^{(k)}$ und $\hat{x}$ weniger als 10^{-10} betragen wird.

3. Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\ .$$

Geben Sie eine Abschätzung für die Genauigkeit der Lösung (x_1, x_2) an unter der Annahme, dass die einzelnen Einträge b_1 und b_2 der rechten Seite jeweils nur mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$ bekannt sind.

4. Verwenden Sie das CG-Verfahren mit Startwert $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$, um das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Geben Sie dabei die Ergebnisse sämtlicher Rechenschritte aus, und führen Sie die Iteration bis zur Konvergenz durch.