Name:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

---

2. Klausur Numerische Mathematik

19. Oktober 2010

1. Bestimmen Sie eine Näherung der Lösung des Gleichungssystems

$$x^2 + 4y^2 = 16\,,$$
$$xy^2 = 4\,,$$

indem Sie einen Schritt des Newtonverfahrens mit Startwert $(x_0, y_0) = (2, 2)$ durchführen.

2. Wir betrachten das Verfahren

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{i,j}\cdot x_j^{(k)}\right)$$

zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Dabei ist $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, $b = (b_i)_i \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, und $\omega \in (0,1)$ ein fix gewählter Parameter.

Zeigen Sie: Ist A strikt diagonal dominant, dann konvergiert dieses Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

3. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos(\pi x) + x^3 + x^2 - 2x + 1\,,$$

besitzt eine Nullstelle bei $\hat{x} = 1$. Geben Sie ein möglichst großes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, sodass für alle $a \in I$ die zu

$$\Phi_a(x) = x \quad \text{mit} \quad \Phi_a(x) := x + af(x)$$

gehörende Fixpunktiteration $x_{n+1} := \Phi_a(x_n)$ lokal gegen $\hat{x}$ konvergiert.

4. Versuchen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1000 & 1000 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

einmal mittels LR-Zerlegung ohne Spaltenpivotsuche und einmal mittels LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche zu lösen. Runden Sie dabei nach jedem Rechenschritt auf zwei signifikante Stellen.