Name:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

---

1. Klausur Numerische Mathematik

29. Juni 2010

1. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

einmal mittels **LR Zerlegung ohne Spaltenpivotsuche** und einmal mittels **LR Zerlegung mit Spaltenpivotsuche**. Runden Sie dabei auf zwei Stellen (Beispiele: $1 \,!\!+\, 0.012 = 1.01$, $100 \,!\!+\, 11.2 = 111$). Welches Ergebnis ist näher bei der exakten Lösung? Weshalb?

2. Finden Sie das Minimum $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ der reellwertigen Funktion

$$f(x, y) = x - y + \frac{y^2 - y + 1}{(y - y^2)(1 - x)} \ .$$

Lösen Sie dazu die Optimalitätsbedingung

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

indem Sie **zwei Schritte des Newtonverfahrens** mit Startwert $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ durchführen.

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3/2 \\ 1/3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Zeigen Sie, dass sowohl das Gesamtschrittverfahren als auch das Einzelschrittverfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^3$ und jeden Startwert $x^{(0)}$ konvergieren.

4. Die Polynomfunktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2$$

hat eine einfache Nullstelle bei $\hat{x} = 2$. Geben Sie ein möglichst großes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, sodass für alle $a \in I$ die zu

$$\Phi_a(x) = x \quad \text{mit} \quad \Phi_a(x) := x + af(x)$$

gehörende Fixpunktiteration $x_{n+1} := \Phi_a(x_n)$ lokal gegen $\hat{x}$ konvergiert.