Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

9. Übungsblatt, Mai 2011

1. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesch und seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ die absteigend geordneten Eigenwerte von A. Sei weiters $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{K}^n$ ein orthonormales System und $1 \leq k < n$. Zeigen Sie, dass
$$\max_{\substack{x \perp [z_1,\ldots,z_k] \\ x \neq 0}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_{k+1} \,.$$

2. Zeigen Sie, dass die auf $(0,\infty)$ definierten Abbildungen
$$\Phi_1(x) = -\ln(x)\,, \quad \Phi_2(x) = e^{-x}\,, \quad \Phi_3(x) = \bigl(x + e^{-x}\bigr)/2$$
alle denselben Fixpunkt $\hat{x}$ besitzen. Was lässt sich über die Konvergenz der zugehörigen Fixpunktiterationen sagen? Welche der Iterationen wird am schnellsten konvergieren?

3. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Iteration (*Heron-Verfahren*)
$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right] .$$
Zeigen Sie, dass die Iterierten lokal quadratisch gegen die n-ten Wurzeln von a konvergieren. Berechnen Sie weiters die ersten vier Iterationsschritte für $a = 2$ und $n = 2$ mit dem Startwert $x_0 = 1$. Konvergiert das Verfahren für jeden Startwert $x_0 > 0$?

4. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\Phi\colon (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto x + (x-1)^2$$
den Fixpunkt $\hat{x} = 1$ besitzt und dass $f'(\hat{x}) = 1$ gilt. Zeigen sie weiters, dass für jeden Startwert $x_0 \in (0,1)$ die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen $\hat{x}$ konvergiert, die Konvergenz allerdings sublinear ist.

5. Implementieren Sie das Heron-Verfahren aus Aufgabe 3 für $a = 1$ in Matlab.

   Sei Q das Einheitsquadrat in $\mathbb{C}$, also
$$Q = \{a + i \cdot b : |a| \leq 1 \text{ und } |b| \leq 1\} .$$
   Verwendet man eine Zahl $x_{(0)} \in Q$ als Startwert für das Heron-Verfahren, so konvergiert die resultierende Folge (fast sicher) gegen *eine* der n Einheitswurzeln r_j. Wählen Sie ein Sample von Startwerten aus Q (z.B. ein äquidistantes Gitter)

und berechnen Sie die Grenzwerte des Heron-Verfahrens. Wenn man jeder der n Einheitswurzeln eine Farbe zuordnet, so können nun alle Startwerte in diesem Sample entsprechend ihrem Grenzwert eingefärbt werden. Was für ein Bild ergibt sich? Plotten Sie dieses Bild für $n = 3, 4, \ldots$

Hinweise: Das Verfahren aus Aufgabe 3 verwendet nur punktweise Operationen, d.h., man kann die Iteration auch simultan auf eine ganze Matrix von Startwerten anwenden. Mit dem Befehl `imagesc` können Sie in MATLAB schnell Bilder erzeugen.

6. Implementieren Sie das Newton- und Sekantenverfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wählen Sie ein geeignetes Abbruchkriterium. Testen Sie ihr Programm anhand der folgenden Beispiele:

$$f(x) = x^3 - 2$$

mit Startwert $x_0 = 2$,

$$g(x) = (1 + \cos(x))^2$$

mit Startwert $x_0 = 3$. Beobachten Sie die Konvergenzgeschwindigkeit.