Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

8. Übungsblatt, Mai 2011

1. Seien A und b definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Verwenden Sie das CG-Verfahren, um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Verwenden Sie dabei den Startvektor $x^{(0)} = 0$.

2. Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^n$ ist.

   Genauer: Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{A} = QAQ^*$. Bezeichne $x^{(k)}$ die k-te Iterierte des CG-Verfahrens für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Startvektor $x^{(0)}$ und $\tilde{x}^{(k)}$ die k-te Iterierte für $\tilde{A}\tilde{x} = Qb$ mit Startvektor $\tilde{x}^{(0)} = Qx^{(0)}$. Dann ist $\tilde{x}^{(k)} = Qx^{(k)}$.

3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit maximalem Spaltenrang. Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

   Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ beliebig, setze $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $s^{(0)} = A^*r^{(0)}$ und $d^{(0)} = s^{(0)}$. Für $k = 0, 1, \ldots$ setze

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\left\|s^{(k)}\right\|^2}{\left\|Ad^{(k)}\right\|^2}, \\
x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}, \\
r^{(k+1)} &= r^{(k)} - \alpha_k A d^{(k)}, \\
s^{(k+1)} &= A^* r^{(k+1)}, \\
\beta_k &= \frac{\left\|s^{(k+1)}\right\|^2}{\left\|s^{(k)}\right\|^2}, \\
d^{(k+1)} &= s^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)},
\end{aligned}$$

   wobei der Algorithmus abgebrochen wird, sobald $s^{(k)} = 0$.

   Zeigen Sie, dass $x^{(k)}$ gegen die Lösung des Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|^2 \to \min \tag{1}$$

   konvergiert.

4. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine beliebige Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass unter allen Lösungen des Ausgleichsproblems (1) genau eine Lösung $x^\dagger$ existiert, die das Funktional $\|x\|^2$ minimiert. Zeigen Sie weiters, dass der Algorithmus aus Aufgabe 3 mit Startwert $x^{(0)} = 0$ auch dann konvergiert, wenn die Matrix A nicht vollen Rang hat, und zwar gegen $x^\dagger$.

5. Implementieren Sie in MATLAB das CG-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.

   Für $c \geq 0$ sei die Tridiagonalmatrix $A_c \in \mathbb{R}^{200\times 200}$ definiert durch die Hauptdiagonale $d_c = (2+c, \ldots, 2+c) \in \mathbb{R}^{200}$ und die Nebendiagonalen $l = u = (-1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^{199}$. Sei weiters $b = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{200}$.

   Lösen Sie mit Hilfe Ihres Programms das Gleichungssystem $A_c x = b$ für verschiedene (kleine) $c > 0$. Wie hängt die Zahl der Schritte, die benötigt wird, um eine vorgegebene Genauigkeit zu erreichen, von c ab?

6. Gegeben sind Datenpunkte $(t_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq j \leq n$. Gesucht ist ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k$ vom Grad $0 \leq m < n$, das die Daten möglichst gut beschreibt. Das heißt, es soll der quadratische Fehler

   $$F(p) = \sum_{j=1}^n |p(t_j) - y_j|^2$$

   über allen reellen Polynomen vom Grad kleiner gleich m minimiert werden. Sei nun A die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^m \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^m \end{pmatrix} .$$

   Dann lässt sich die Minimierung von F schreiben als Lösung des Ausgleichsproblems

   $$\|Ac - y\|^2 \to \min ,$$

   wobei $c = (c_0, \ldots, c_m)^T$ der Koeffizientenvektor des Polynoms p ist und $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

   Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das zu gegebenen Datenpunkten $(t_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$ und gewünschtem Grad m das optimale Polynom p bestimmt. Verwenden Sie zur Lösung des Ausgleichsproblems ein Verfahren Ihrer Wahl (ohne dabei auf die in MATLAB vordefinierten Löser zurückzugreifen).

   Testen Sie das Programm mit $n = 100$, $t_j = 2\pi j/n$ und $y_j = \sin(t_j)$. Plotten Sie die Ergebnisse für verschiedene m.