Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

7. Übungsblatt, Mai 2011

1. Zeigen Sie: Ist A hermitesch, so sind zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenvektoren von A orthogonal. Gilt dies auch bei nicht hermiteschen Matrizen?

2. Es sei $A = XDX^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, $F \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beliebig und λ ein Eigenwert von $A + F$. Zeigen Sie, dass ein Eigenwert $\hat{\lambda}$ von A existiert mit $|\lambda - \hat{\lambda}| \leq \mathrm{cond}_1(X)\,\|F\|_1$.

3. Führen Sie die ersten drei Iterationen der Potenzmethode von v. Mises mit der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
und den Startvektoren
$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } z^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
durch. Was beobachten Sie?

4. Berechnen sie Approximationen an die Eigenwerte der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
mit der gebrochenen Iteration von Wielandt. Verwenden Sie zunächst den Satz von Gerschgorin um geeignete Näherungen an die Eigenwerte von A zu finden und führen Sie dann jeweils zwei Schritte der gebrochenen Iteration durch.

5. Implementieren Sie in Matlab die Potenzmethode von v. Mises zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes einer Matrix und des zugehörigen Eigenvektors. Finden Sie dabei ein geeignetes Abbruchkriterium für die Iteration. Testen Sie Ihr Programm an den Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Implementieren Sie in Matlab die gebrochene Iteration von Wielandt, die zu gegebener Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ den Eigenwert von A bestimmt, der am nächsten bei λ liegt.