Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

6. Übungsblatt, Mai 2011

1. Führen Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   ausgehend von $x^{(0)} = (1,1)^T$ zwei Schritte des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens durch. Konvergieren die Verfahren?

   Schätzen Sie ab, wieviele Iterationen man jeweils durchführen muss, damit die Differenz von Iterierter und tatsächlicher Lösung in der Norm kleiner als 10^{-6} wird.

2. Das SOR-Verfahren (*Successive OverRelaxation*) ist ein iteratives Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

   Dabei wählt man sich ein $\omega \in (0,2)$ sowie einen Startwert $x^{(0)}$ und berechnet $x_i^{(k+1)}$ iterativ nach der Vorschrift

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right) .$$

   Zeigen Sie, dass sich das SOR-Verfahren in das allgemeine Schema einer Fixpunktiteration einordnen lässt. Es sind also eine Matrix T_ω und ein Vektor t_ω zu finden, sodass

$$x^{(k+1)} = T_\omega x^{(k)} + t_\omega$$

   gilt und der Fixpunkt der Abbildung $x \mapsto T_\omega x + t_\omega$ durch die Lösung der Gleichung $Ax = b$ gegeben ist.

   Was passiert im Spezialfall $\omega = 1$?

3. Um bei iterativen Lösungsverfahren die Konvergenz zu beschleunigen wird das zu lösende Gleichungssystem manchmal *vorkonditioniert*, d.h., anstatt $Ax = b$ löst man $S^{-1}Ax = S^{-1}b$, wobei S passend zu A gewählt ist (und leicht invertiert werden kann). Eine Möglichkeit wäre beispielsweise $S = D$ die Hauptdiagonale von A. Zeigen Sie, dass diese Art der Vorkonditionierung mit $S = D$ bei Einzel- und Gesamtschrittverfahren zu keinerlei Verbesserung führt.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Vektornorm $\|\cdot\|_\varepsilon$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert, sodass die induzierte Matrixnorm $|||\cdot|||_\varepsilon$ die Ungleichung

$$|||A|||_\varepsilon < \rho(A) + \varepsilon$$

   erfüllt, wobei $\rho(A)$ den Spektralradius von A bezeichnet.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mithilfe der Jordanschen Normalform der Matrix A, dass eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

mit modifizierten „Jordankästchen“

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \varepsilon \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

wobei λ_k die Eigenwerte von A sind. Verwenden Sie die Matrix T, um die gesuchte Norm zu definieren.

5. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das ein Gleichungssystem $Ax = b$ mithilfe des *Gesamtschrittverfahrens* löst. Dabei sollen sowohl der Startvektor $x^{(0)}$ als auch die maximale Anzahl der Iterationen vom Benutzer zu wählen sein.

6. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das ein Gleichungssystem $Ax = b$ mithilfe des *Einzelschrittverfahrens* löst. Dabei sollen sowohl der Startvektor $x^{(0)}$ als auch die maximale Anzahl der Iterationen vom Benutzer zu wählen sein.