Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

5. Übungsblatt, April 2011

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung des Ausgleichsproblems
$$\|Ax - b\|^2 \to \min \tag{1}$$
ist, wenn x die Gleichung
$$A^*Ax = A^*b$$
erfüllt.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Sei weiters $A = QR$ eine Zerlegung von A in eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann hat R die Form
$$R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
wobei $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist und 0 die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{(m-n)\times n}$ bezeichnet. Bezeichne weiters $\hat{y}$ den Vektor der ersten n Komponenten von Q^*b.

   Zeigen Sie unter der Annahme, dass der Rang der Matrix A gleich n ist, dass $x \in \mathbb{R}^n$ das Ausgleichsproblem (1) genau dann löst, wenn x die Gleichung
$$\hat{R}x = \hat{y}$$
erfüllt.

3. Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

4. Lösen Sie das Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|^2 \to \min$, wobei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Eine Tridiagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \geq 2$ hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ l_1 & d_2 & u_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & l_2 & d_3 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & d_{n-2} & u_{n-2} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & l_{n-2} & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & l_{n-1} & d_n \end{pmatrix},$$

das heißt alle Einträge außerhalb der mittleren drei Diagonalen sind Null. Insbesondere ist A durch die Vektoren $d \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $l \in \mathbb{R}^{n-1}$ bereits eindeutig bestimmt. Weiters gilt, dass auch die Matrizen in einer LR-Zerlegung von A wieder Tridiagonalgestalt haben (siehe Übungen).

Schreiben Sie ein Matlab Programm, das zu gegebenen $d \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$, $l \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ das Gleichungssystem $Ax = b$ löst, wobei A die durch d, u und l bestimmte Tridiagonalmatrix ist. Implementieren Sie dazu den Gaußalgorithmus (ohne Pivotsuche) derart, dass jeweils nur die erste untere Nebendiagonale der Matrix L und die Hauptdiagonale und erste obere Nebendiagonale der Matrix R abgespeichert werden.

6. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ berechnet, wobei $m \geq n$. Verwenden Sie dazu den Algorithmus aus der Vorlesung.