Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

4. Übungsblatt, April 2011

1. Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$ der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
Verwenden Sie dabei das Verfahren, das Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.

2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine positiv definite, hermitesche Tridiagonalmatrix mit Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$. Zeigen Sie, dass alle Einträge der Matrix L außerhalb der Hauptdiagonale und der ersten unteren Nebendiagonale gleich Null sind.

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch. Eine Zerlegung $A = LDL^*$, wobei L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonale ist und D eine Diagonalmatrix, heißt LDL-Zerlegung von A. Zeigen Sie, dass jede positiv definite, hermitesche Matrix eine LDL-Zerlegung besitzt. Gilt dies auch für indefinite Matrizen?

4. Bestimmen Sie eine LDL-Zerlegung der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & -9 \\ -3 & 1 & -8 & 5 \\ 6 & -8 & 12 & -20 \\ -9 & 5 & -20 & 20 \end{pmatrix}.$$

5. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Zerlegung $PA = \tilde{L}R$ mittels Spaltenpivotsuche bestimmt, wobei P eine Permutationsmatrix, $\tilde{L}$ eine linke untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonale und R eine rechte obere Dreiecksmatrix ist.

   Schreiben Sie weiters ein Programm, das mithilfe obiger Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ zu vorgegebenem $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ löst. Testen Sie Ihr Programm mit
$$A := \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

6. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das eine Cholesky-Zerlegung einer gegebenen symmetrischen und positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ausgibt.